电子社考研权威辅导丛书

小鑫考研嘚吧嘚

考研数学历年真题解析（数学三）

潘鑫　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书作者深入分析考研数学试题的特点和难点，对 2009—2015 年考研数学三的真题进行了详细的解读，力求将清晰完整的解题思路呈献给广大考生。通过自学本书，考生可以对考题难度及考点分布有一定程度的了解，并对往年真题的解题技巧和策略有全面的掌握。除此之外，书中含有大量知识点回顾和生动的讲解、举例，对培养考生独立解题思路具有重要意义。

本书配有真题讲解视频，有助于考生提高复习效率，全面掌握解题方法，最终取得优异成绩。

图书在版编目 (CIP) 数据

小鑫考研嘚吧嘚．考研数学历年真题解析．数学三 / 潘鑫编著．—北京：电子工业出版社，2015.7
（电子社考研权威辅导丛书）
ISBN 978-7-121-26495-5

Ⅰ．①小…　Ⅱ．①潘…　Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ．① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 147053 号

策划编辑：齐　岳
责任编辑：徐　静　齐　岳　　特约编辑：刘　凡
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　　邮编 100036
开　　本：787×980　1/16　　印张：18.75　　字数：420 千字
版　　次：2015 年 7 月第 1 版
印　　次：2015 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：52.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

在大学四年生活接近尾声的时候，何去何从成了最引人注意的话题。在社会竞争日益激烈的今天，继续深造无疑是有志青年不约而同的选择，而其中大多数同学选择考研，所以如何在这场“战役”中夯实基础，走好每一步变得十分关键。本书是一本非常朴实的书，它毫无保留地告诉你每一道题应该怎么做，帮助你把相关知识点吃透，像一位不辞劳苦的老师一遍遍唠叨着类似问题该如何处理。细读本书，你会发现它在众多考研数学辅导书籍中独树一帜，在看似唠叨的讲解中，你会轻轻松松掌握考研数学的实战精髓。

本书定位

本书是一本适合自学的真题解析书，它内容详尽、语言通俗，解题步骤一步不落，在重点难点处还配有知识点回顾及视频讲解。本书的真题解析通俗易懂，不存在让考生费解的跳跃性强的解题步骤，基础薄弱的考生也能迅速看懂解析，轻松掌握知识点，实现会做题、做对题的最终效果。

真题解析书籍的优劣体现在它是“授之以渔”还是“授之以鱼”，书中每一道题的讲解都有举一反三的效果，每一个容易被忽视的细节、容易被钻空子的思维定势、容易被混淆的知识点都被详尽地阐述出来。也许有的同学不理解为什么一道选择题、填空题竟然有4页解析，其实这正体现了本书的最大特色：注重解题思路。只有全面掌握解题思路，在考场上才会游刃有余。如果踏踏实实看完本书，相信通过本书“手把手”的辅导，你会从中悟出一些解题的技巧和道理，在汲取本书的精粹之后，你便可以甩开拐杖，独立行走。

本书特色

1. 语言通俗

市面上的很多考研数学真题解析类书籍的叙述方式都比较晦涩拗口，虽然解题步骤看似简洁明了，但是对于紧锣密鼓准备考研的同学来说，却显得不那么体贴。考生往往需要用很长的时间去理解文字表达的意思和公式推导的步骤，这样不仅降低了复习效率，也使考生的复习情绪更加焦躁。考研辅导书最重要的特点就应该是通俗易懂，毕竟我们需要动脑筋的地方不是揣测作者的意思，而是真正把题做透、做明白。我力图把本书编写得更加

活泼生动，在解题步骤的叙述上避免一切不利于理解的障碍和歧义，希望读者在看书做题的时候能体会到和作者的互动交流，抛弃沉重的负担，轻松掌握知识。

2. 逻辑清晰

本书的编排合理，逻辑关系十分清楚。具体来讲，书中没有一处讲解是可有可无的，每一步推导、每一个细小的知识点对于解题来说都是至关重要的。当考生遇到不会做的题时，这样全面详尽的讲解会让你一下捕捉到自己知识储备的盲点，不论这个盲点有多么微小，都是阻碍你考出理想成绩的绊脚石。本书的讲解就像是多米诺骨牌：一道题被轻轻一推，一类题就都拜倒在我们脚下了。

我是一个标准的90后，痴迷于大学阶段的各种数学类课程。在本科学习阶段就利用课余时间给同学们办讲座，帮助大家顺利通过期末考试。在考研数学的实战中，我取得了近乎满分的成绩，这得益于我在平时学习和备考过程中总结的一套特有的学习方法。在读研阶段，我一边学习一边在各大考研机构授课并录制教学视频，为的是把自己的学习方法教给更多需要帮助的同学，在考研路上助他们一臂之力。

本书的编写经过了多次修改，对题目的分析也尽力达到透彻完整。谨以此书献给所有在考研路上拼搏的同学们，我相信踏实的努力和认真的态度会帮助你们取得满意的成绩。

莫道功名需百战，愿效滴水洞石穿。为有胸怀摘星志，手足协力共登攀。莫道征途路漫漫，愿效江水去不还。大势所向天地宽，终究奔涌归浩瀚。祝同学们考研成功！

潘鑫

2015年6月于北京

目录 CONTENTS

2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题及精解

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

（1）设$\{x_n\}$是数列，下列命题中不正确的是(　　)。

（A）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

（B）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

（C）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

（D）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

解：解答本题之前，我先提醒大家一下，本题让选择的是“不正确的”，大家一定要注意审题。

先来看（A）选项。

（A）选项是“若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$”。这句话显然是正确的，因为若某数列的极限为 a，则该数列的任意一个子数列的极限肯定也是 a。而数列$\{x_{2n}\}$和数列$\{x_{2n+1}\}$显然是数列$\{x_n\}$的两个子数列（数列$\{x_n\}$是 x_1、x_2、$x_3\cdots$；数列$\{x_{2n}\}$是 x_2、x_4、$x_6\cdots$；数列$\{x_{2n+1}\}$是 x_3、x_5、$x_7\cdots$），所以数列$\{x_{2n}\}$和数列$\{x_{2n+1}\}$的极限肯定也是 a，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$。所以（A）选项正确。

再来看（B）选项。

（B）选项是“若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$”。按理来说，子数列的极限是推不出原数列的极限的（只能从原数列的极限推子数列的极限），但是（B）选项所说的这个结论却是正确的。大家不必去问为什么，直接背下来就好，这个结论非常有用，很多题中都会用到。由于（B）选项正确，所以本题不能选择（B）选项。

再来看（C）选项。

（C）选项是“若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$”。这句话显然是正确的，因为若某

数列的极限为 a，则该数列的任意一个子数列的极限肯定也是 a。而数列 $\{x_{3n}\}$ 和数列 $\{x_{2n+1}\}$ 显然是数列 $\{x_n\}$ 的两个子数列(数列 $\{x_n\}$ 是 x_1、x_2、$x_3\cdots$；数列 $\{x_{3n}\}$ 是 x_3、x_6、$x_9\cdots$；数列 $\{x_{2n+1}\}$ 是 x_3、x_5、$x_7\cdots$)，所以数列 $\{x_{3n}\}$ 和数列 $\{x_{2n+1}\}$ 的极限肯定也是 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1} = a$。所以（C）选项正确 。

其实现在我们已经可以确定本题应该选择（D）选项了，不过还是来判断一下吧。

来看（D）选项。

（D）选项是“若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$”。我们来举个反例，例如：

$$x_{3n} = 1 + \frac{1}{3n}$$

$$x_{3n+1} = 1 + \frac{1}{3n+1}$$

$$x_{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$$

一定要注意：有的同学认为既然 $x_{3n} = 1 + \frac{1}{3n}$，那么 x_{3n+1} 必然就是 $1 + \frac{1}{3n+1}$，x_{3n+2} 必然就是 $1 + \frac{1}{3n+2}$，所以这些同学会认为上面写的 $x_{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$ 写错了。而实际上，x_{3n}、x_{3n+1}、x_{3n+2} 这三者互相之间是没有任何关系的，想怎么设就怎么设(比如完全可以设 $x_{3n} = n$，$x_{3n+1} = 2n$、$x_{3n+2} = n^2$)。现在大家明白了吧。

那么大家来看，很显然有

$$\lim_{n\to\infty}x_{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}x_{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right) = 1$$

也就是说,我们设的 x_{3n} 和 x_{3n+1} 满足（D）选项中所说的“若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1} = a$”，现在来看看这是否能推出“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$”。

假设能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$(对于本题来说就是“假设能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3n}\right) = 1$”)，根据定理“若某数列的极限为 a，则该数列的任意一个子数列的极限肯定也是 a”可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+2} = 1$。可是实际上，由于 $x_{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$，所以很明显 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+2} = 2 \neq 1$。可知“$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1} = a$”根本就推不出“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$”，所以（D）选项是不正确的,本题应该选择（D）选项。

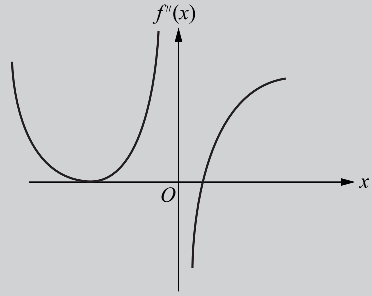
（2）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，其2阶导函数$f''(x)$的图形如右图所示，则曲线$y=f(x)$的拐点个数为（　　）。

（A）0

（B）1

（C）2

（D）3

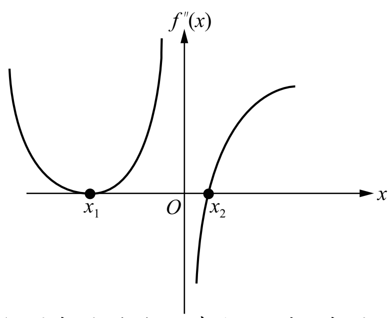


解：我们先来关注一下本题所给的图。

也许大多数同学的心中都有一个可怕的思维定势，那就是：平面直角坐标系的两个轴肯定是 x 轴和 y 轴。正是由于很多同学都有着这个可怕的思维定势，所以我才说先来关注一下本题所给的图。

大家仔细看一下，本题所给的平面直角坐标系的两个轴是 x 轴和 y 轴吗？不是！是 x 轴和 $f''(x)$ 轴。也就是说，本题所给出的图像是二阶导函数 $f''(x)$ 的图像，而不是函数 $f(x)$ 的图像。如果没有注意到这一点，那么这道题必错无疑，因此审题至关重要。

为了方便后续的讲解，先在题中所给的平面直角坐标系中标出两个点 x_1 和 x_2，如下图所示。



本题问的是曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数，我们知道，拐点取自二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点。

那么从上图中，很容易看出：点 $x=x_1$ 和点 $x=x_2$ 是二阶导函数为 0 的点，点 $x=0$ 是二阶导函数不存在的点。

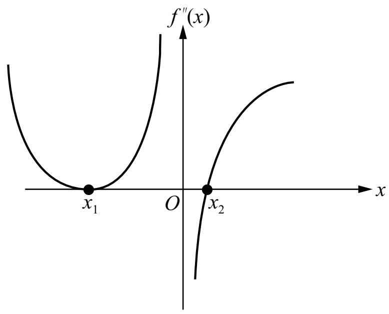
这时有的同学就说了："那就是一共三个点嘛，所以本题选（D）。"这种说法是完全错误的，因为我刚才用的词是"取自"。也就是说，并非所有二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点都一定是拐点（当然，也有可能所有二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点都是拐点），而是拐点从二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点中取罢了。

那么，在 $x=x_1$、$x=x_2$、$x=0$ 这三个点中，究竟哪个是拐点呢？我们怎么判断？判断的方法是：分别看这三个点，看每个点两侧的二阶导函数是否一个大于 0 一个小于 0。如果

是，那么该点就是拐点；如果不是，该点就不是拐点。

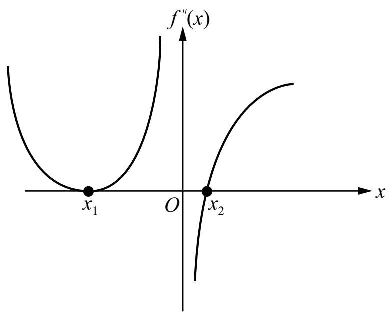
先来判断点 $x = x_1$ 是不是拐点。

由下图可知，$x = x_1$ 两侧的二阶导函数都是大于 0 的，所以 $x = x_1$ 不是拐点。



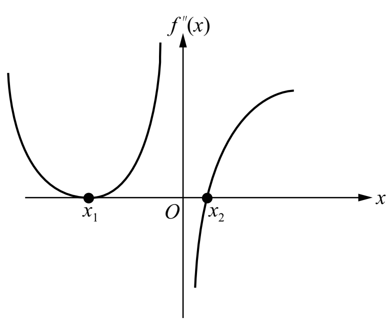
再来判断点 $x = 0$ 是不是拐点。

由下图可知，$x = 0$ 左侧的二阶导函数大于0，$x = 0$ 右侧的二阶导函数小于0，所以 $x = 0$ 是拐点。



最后判断点 $x = x_2$ 是不是拐点。

由下图可知，$x = x_2$ 左侧的二阶导函数小于0，$x = x_2$ 右侧的二阶导函数大于0，所以 $x = x_2$ 是拐点。



综上所述，曲线 $y = f(x)$ 一共有两个拐点，所以本题应该选择（C）选项。

（3）设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x,x^2+y^2\leqslant 2y\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）。

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

（B）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

（C）$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$

（D）$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

解： 本题是计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。大家都知道，二重积分可以用“直角坐标系法”来计算，或者用“极坐标系法”来计算。

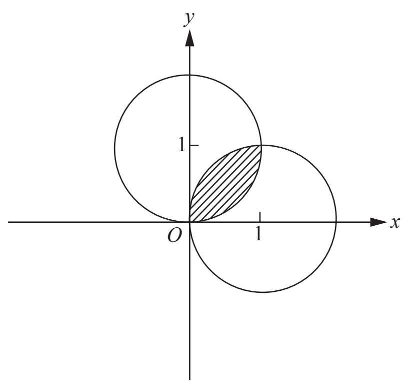
本题所给的四个选项中，（A）选项和（B）选项是用“极坐标系法”来计算的，（C）选项和（D）选项是用“直角坐标系法”来计算的。

本题我所采用的讲解方法是“先告诉大家答案，然后再给大家解释为何选这个答案”。

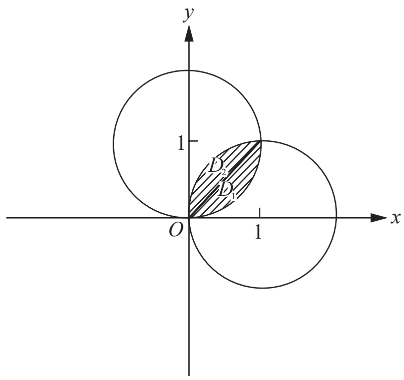
本题应该选择（B）选项，下面我来解释一下原因。

首先，在平面直角坐标系中画出二重积分的积分区域 D，也就是画出 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x,x^2+y^2\leqslant 2y\}$。

$x^2+y^2\leqslant 2x$ 可以整理为 $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$，这是圆心在 $(1,0)$、半径为 1 的圆。$x^2+y^2\leqslant 2y$ 可以整理为 $x^2+(y-1)^2\leqslant 1$，这是圆心在 $(0,1)$、半径为 1 的圆。所以图像如下图所示。



画出积分区域 D 的图，然后以直线 $y=x$ 将积分区域分为 D_1 和 D_2 两个区域，如下图所示。



所以有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

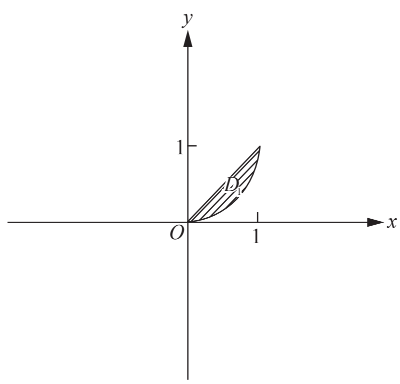
先用“极坐标系法”计算$\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

将$\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$写为$\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}\theta \int_c^d f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$。

现在来确定一下外层积分θ的积分上下限a、b，以及内层积分r的积分上下限c、d。

先来确定θ的积分上下限a、b。

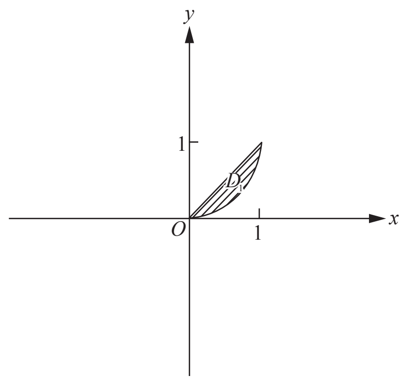
大家来看下图所示阴影区域。



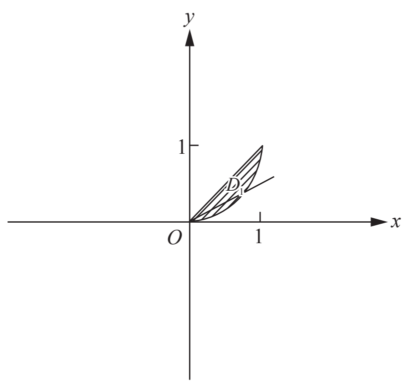
在阴影区域D_1的边界(即$x^2+(y-1)^2=1$和$y=x$)上有无数个点，从中任选一个点记为点A，请问直线OA与x轴正半轴之间的角度是多少？有的同学说这个问题无法回答，因为点A是任选的。的确，但是从图中可以看出，无论点A选在阴影区域D的边界上的何处，直线OA与x轴正半轴之间的角度最小可以无限接近$0°$(当点A取在$x^2+(y-1)^2=1$上时，越靠下，直线OA与x轴正半轴之间的角度越接近$0°$)，最大是$45°$(点A取在$y=x$上)。所以$a=0$，$b=\frac{\pi}{4}$。

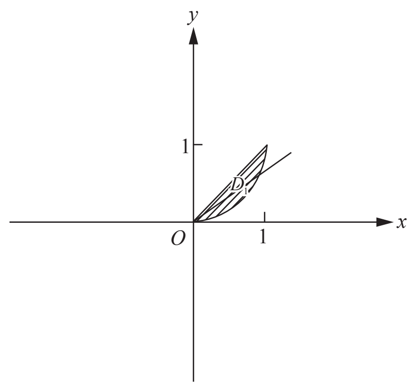
再来确定r的积分上下限c、d。

大家来看下图所示阴影区域。



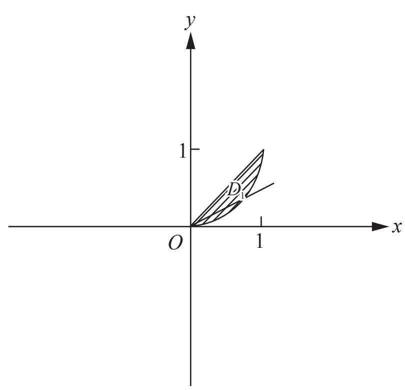
先来确定 r 的积分下限 c。从原点 O 引一条经过阴影区域的直线，当然，这有无数种引法，如下图所示的两种。

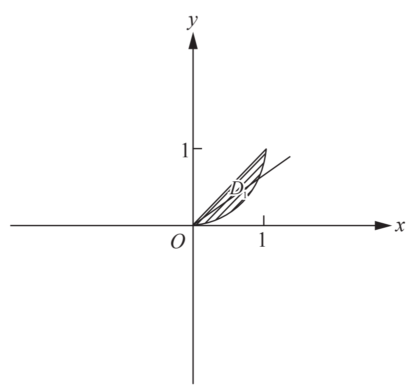




以上只给出了两种引法，实际上有无数种引法。无论是哪种引法，该直线肯定与阴影区域的边界有两个交点。在这两个交点中，离原点近的点肯定是原点本身。而原点到原点的距离肯定是0，所以 $c = 0$。

我们再来确定 r 的积分上限 d。从原点 O 引一条经过阴影区域的直线，当然，这有无数种引法，如下图所示的两种。





这里只给出了两种引法，实际上有无数种引法。无论是哪种引法，该直线肯定与阴影区域的边界有两个交点。在这两个交点中，离原点远的点肯定是在边界 $x^2+(y-1)^2=1$ 上。把 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$ 代入到 $x^2+(y-1)^2=1$ 中，解得

$r=2\sin\theta$。所以 $d=2\sin\theta$。

现在，a、b、c、d 已经都求出来了，$a=0$，$b=\dfrac{\pi}{4}$，$c=0$，$d=2\sin\theta$。所以 $\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$。

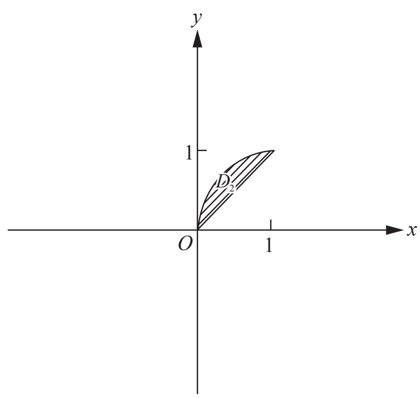
下面再用“极坐标系法”计算 $\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

先将 $\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为 $\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}\theta\int_c^d f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$。

现在来确定外层积分 θ 的积分上下限 a、b，以及内层积分 r 的积分上下限 c、d。

先来确定 θ 的积分上下限 a、b。

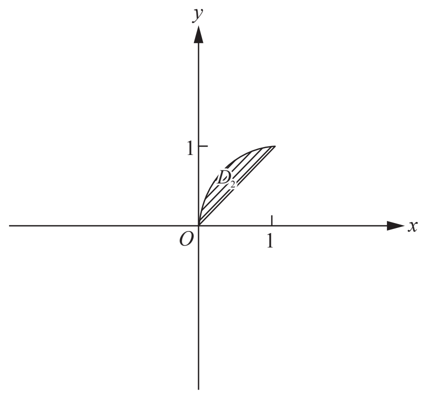
大家来看下图所示阴影区域。



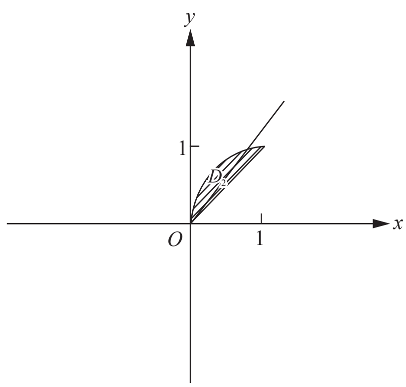
在阴影区域 D_2 的边界(即$(x-1)^2+y^2=1$ 和 $y=x$) 上有无数个点，从中任选一个点记为点 A，请问直线 OA 与 x 轴正半轴之间的角度是多少？有的同学说这个问题无法回答，因为点 A 是任选的。的确，但是从图中可以看出，无论点 A 选在阴影区域 D 的边界上的何处，直线 OA 与 x 轴正半轴之间的角度最小是 $45°$(点 A 取在 $y=x$ 上)，最大可以无限接近 $90°$(当点 A 取在$(x-1)^2+y^2=1$ 上时，越靠下，直线 OA 与 x 轴正半轴之间的角度越接近 $90°$)。所以 $a=\dfrac{\pi}{4}$，$b=\dfrac{\pi}{2}$。

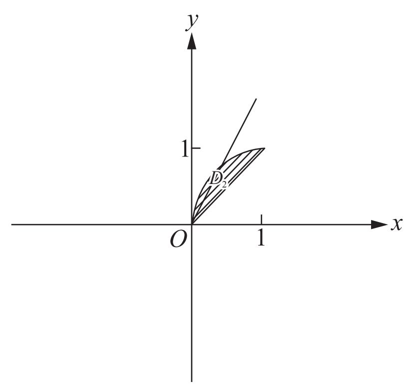
再来确定 r 的积分上下限 c、d。

大家来看下图所示阴影区域。



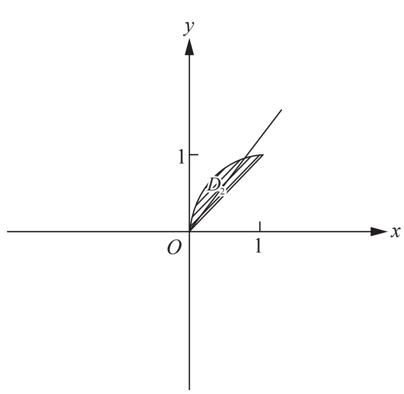
先来确定 r 的积分下限 c。从原点 O 引一条经过阴影区域的直线，当然，这有无数种引法，如下图所示的两种。

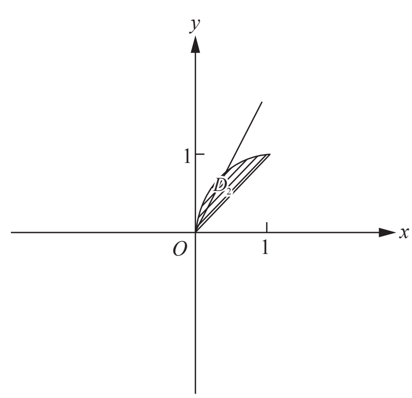




以上只给出了两种引法，实际上有无数种引法。但是，无论是哪种引法，该直线肯定与阴影区域的边界有两个交点。在这两个交点中，离原点近的点肯定是原点本身。而原点到原点的距离肯定是0，所以 $c = 0$。

再来确定 r 的积分上限 d。从原点 O 引一条经过阴影区域的直线，当然，这有无数种引法，如下图所示的两种。





这里只给出了两种引法，实际上有无数种引法。但是，无论是哪种引法，该直线肯定与

阴影区域的边界有两个交点。在这两个交点中，离原点远的点肯定是在边界$(x-1)^2+y^2=1$上。把$x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$代入到$(x-1)^2+y^2=1$中，解得

$r=2\sin\theta$。所以$d=2\cos\theta$。

现在，a、b、c、d已经都求出来了，$a=\dfrac{\pi}{4}$，$b=\dfrac{\pi}{2}$，$c=0$，$d=2\cos\theta$。所以$\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$。

由于

$$\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

所以

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

所以本题应该选择（B）选项。

（4）下列级数中发散的是(　　)。

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$

（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})$

（C）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$

（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

解：先看（A）选项。

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$很明显是一个正项级数，我们用正项级数的敛散性判别法中的“比值判别法”来判断。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3} < 1$，由比值判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$收敛。所以本题不能选择（A）选项。

再看（B）选项。

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$很明显是一个正项级数，我们用正项级数的敛散性判别法中的“比较判别法”来判断。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 1$$

由比较判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$的敛散性相同。而当$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$中的$p$大于1时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$收敛。本题不能选择（B）选项。

最后看（D）选项。

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$很明显是一个正项级数，我们用正项级数的敛散性判别法中的“比值判别法”来判断。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$\frac{1}{\mathrm{e}} < 1$，由比值判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛。所以本题不能选择（D）选项。

由排除法可知本题应该选择（C）选项。

（5）设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$，若集合$\boldsymbol{\Omega} = \{1,2\}$，则线性方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$有无穷多解的充分必要条件为(　　)。

(A) $a \notin \boldsymbol{\Omega}, d \notin \boldsymbol{\Omega}$

(B) $a \notin \boldsymbol{\Omega}, d \in \boldsymbol{\Omega}$

(C) $a \in \boldsymbol{\Omega}, d \notin \boldsymbol{\Omega}$

(D) $a \in \boldsymbol{\Omega}, d \in \boldsymbol{\Omega}$

解：本题问的是线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多解的充分必要条件，先把线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 写出来。

由于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，所以线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+2x_2+ax_3=d\\x_1+4x_2+a^2x_3=d^2\end{cases}$$

这明显是一个非齐次方程组(因为该方程组中的第一个方程的等式右侧不是0)，大家还记得求解非齐次方程组通解的方法吗？我来给大家复习一下。

第一步：写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩 r_1、r_2。

第二步：判断解的类型。具体的判断方法如下：

① 若 $r_1\neq r_2$，则该非齐次方程组无解。

② 若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2=n$(未知数个数)，则该非齐次方程组有唯一的解，不用再进行第三步。

③ 若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2<n$(未知数个数)，则该非齐次方程组有无穷多解，需要进行第三步。

第三步：先当成对应的齐次方程组，求出齐次方程组的通解。然后再还原成非齐次方程组，令自由未知数取全零，求出非齐次方程组的一个特解。最后，用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解，得到的就是非齐次方程组的通解。

以上就是求解非齐次方程组通解的三个步骤。不过因为本题只是问非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多解的充分必要条件，所以只需要进行第一步和第二步就可以了。

先进行第一步。

由于非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+2x_2+ax_3=d\\x_1+4x_2+a^2x_3=d^2\end{cases}$，所以该方程组对应的矩阵为

$(\boldsymbol{A}\mid\vec{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}$。第一步结束了吗？还没有。现在只是写出了非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 对应的矩阵，还要求矩阵 $(\boldsymbol{A}\mid\vec{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}$ 的秩 r_1 和矩阵 $\boldsymbol{A}=$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$的秩 r_2。先把该矩阵化为阶梯形矩阵，矩阵$(\boldsymbol{A} \mid \vec{\boldsymbol{b}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix}$化为阶梯形矩阵后得到$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix}$。

现在可以开始求两个秩了，但是这要分好多种情况来讨论。由于本题已经告诉我们该非齐次方程组有无穷多组解，所以我们可以把“求两个秩”这一环节放在“第二步”来进行，这样就不用分那么多情况来讨论了。

下面进行第二步。

但是对于本题而言，由于已知该非齐次方程组有无穷多组解，所以这第二步要做的是“根据已知的该非齐次方程组有无穷多组解，求两个秩 r_1 和 r_2”。

具体来说：由于该非齐次方程组有无穷多组解，所以 $r_1 = r_2 < n$。对于本题而言，未知数个数 $n = 3$，所以有 $r_1 = r_2 < 3$。由于第一步化得的阶梯形矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix}$，$r_1 = r_2 < 3$，所以有$\begin{cases} (a-1)(a-2) = 0 \\ (d-1)(d-2) = 0 \end{cases}$，解得 $a = 1$ 或 $a = 2$，$d = 1$ 或 $d = 2$。

解出 a 和 d 后，我们可以来看本题的四个选项了。

（A）选项是 $a \notin \boldsymbol{\Omega}, d \notin \boldsymbol{\Omega}$，（B）选项是 $a \notin \boldsymbol{\Omega}, d \in \boldsymbol{\Omega}$，（C）选项是 $a \in \boldsymbol{\Omega}, d \notin \boldsymbol{\Omega}$，（D）选项是 $a \in \boldsymbol{\Omega}, d \in \boldsymbol{\Omega}$，而 $\boldsymbol{\Omega} = \{1,2\}$，所以本题应该选择（D）选项。

（6）设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P}\vec{\boldsymbol{y}}$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P} = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$，若 $\boldsymbol{Q} = (\vec{\mathbf{e}}_1, -\vec{\mathbf{e}}_3, \vec{\mathbf{e}}_2)$，则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{y}}$ 下的标准形为(　　)。

（A）$2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

（B）$2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

（C）$2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

（D）$2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

解： 本题可以迅速把（C）选项和（D）选项给排除掉。这是因为：虽然同一个二次型可以被化为不同的标准形，但是这些不同的标准形的正、负惯性指数肯定是相同的。本题中，二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 可以被化为标准形 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$，这个标准形的正惯性指数为 2，负惯性

指数为 1，这就说明二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$所化为的其他标准形的正、负惯性指数也肯定是 2 和 1。(C) 选项给出的标准形的正、负惯性指数分别为 1 和 2，(D) 选项给出的标准形的正、负惯性指数分别为 0 和 3，所以可以迅速排除掉。

那么 (A) 选项和 (B) 选项究竟哪个正确呢？二次型$f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换$\vec{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}\vec{\boldsymbol{y}}$下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\vec{\mathbf{e}}_1,\vec{\mathbf{e}}_2,\vec{\mathbf{e}}_3)$，这说明 2、1、$-1$ 为二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的对应矩阵的三个特征值，同时还说明特征值2 所对应的所有特征向量为 $k_1\vec{\mathbf{e}}_1(k_1\neq 0)$，特征值 1 所对应的所有特征向量为 $k_2\vec{\mathbf{e}}_2(k_2\neq 0)$，特征值 -1 所对应的所有特征向量为 $k_3\vec{\mathbf{e}}_3(k_3\neq 0)$。

由此可知，矩阵$\boldsymbol{Q}=(\vec{\mathbf{e}}_1,-\vec{\mathbf{e}}_3,\vec{\mathbf{e}}_2)$ 的第一列$\vec{\mathbf{e}}_1$ 为特征值2 所对应的特征向量$(k_1=1)$，第二列$-\vec{\mathbf{e}}_3$ 为特征值 -1 所对应的特征向量$(k_3=-1)$，第三列$\vec{\mathbf{e}}_2$ 为特征值1 所对应的特征向量$(k_2=1)$。

综上所述。二次型在正交变换$\vec{x}=Q\vec{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$，所以本题应该选择 (A) 选项。

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件，则(　　)。

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$

(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

(D) $P(AB)\geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

解：以下两个式子是概率论的基本常识：

$$P(AB)\leqslant P(A) \tag{1}$$

$$P(AB)\leqslant P(B) \tag{2}$$

这个很容易明白，两件事同时发生的概率肯定小于等于一件事单独发生的概率。

(1) 式 + (2) 式，得

$$P(AB)+P(AB)\leqslant P(A)+P(B) \tag{3}$$

(3) 式可以整理为

$$P(AB)\leqslant \frac{P(A)+P(B)}{2} \tag{4}$$

所以本题应该选择 (C) 选项。

（8）设总体 $X \sim B(m,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$（　　）。

（A）$(m-1)n\theta(1-\theta)$

（B）$m(n-1)\theta(1-\theta)$

（C）$(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$

（D）$mn\theta(1-\theta)$

解：要想解答这道题，必须知道以下式子（该式大家必须背下来）

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \tag{1}$$

对于本题而言，总体 $X \sim B(m,\theta)$，大家可以看下表。

分　布	数学期望	方　差
① 二项分布 $B(n,p)$	np	$np(1-p)$
② 泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
③ 几何分布 $G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
④ 均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
⑤ 指数分布 $E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
⑥ 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
⑦ χ^2 分布 $\chi^2(n)$	n	$2n$
⑧ t 分布 $t(n)$	0	$\frac{n}{n-2}$

由上表中的 ① 可知，总体 X 的方差为 $m\theta(1-\theta)$。而我们都知道，样本方差 S^2 的数学期望 $E(S^2)$ 肯定等于总体的方差，所以有

$$E(S^2)=m\theta(1-\theta) \tag{2}$$

本题的问题 $E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]$ 很明显可以写为

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=E\left[(n-1)\times\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right] \tag{3}$$

（3）式可以整理为

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=(n-1)\times E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right] \tag{4}$$

将(1)式代入(4)式，得

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=(n-1)\times E[S^2] \tag{5}$$

将(2)式代入(5)式，得

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=(n-1)m\theta(1-\theta) \tag{6}$$

所以本题应该选择(B)选项。

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ________。

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$ 可以改写为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2} \tag{1}$$

根据等价无穷小 $\ln(1+\Delta)\sim\Delta$ 可知，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}$ 可以变为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2} \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2} \tag{3}$$

而(3)式的等式右侧$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$很明显可以写为

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} \tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} \tag{5}$$

根据等价无穷小 $1-\cos\Delta\sim\dfrac{1}{2}\Delta^2$ 可知，$-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 可以变为

$$-\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \tag{6}$$

(5) 式、(6) 式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \tag{7}$$

(7) 式的等式右侧 $-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$ 可以化简为

$$-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \tag{8}$$

(7) 式、(8) 式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2} \tag{9}$$

所以本题应填 $-\frac{1}{2}$。

(10) 设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$，若 $\varphi(1) = 1$，$\varphi'(1) = 5$，则 $f(1) =$ ________。

解：将 $\varphi(1) = 1$ 代入 $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$ 中，得

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1 \tag{1}$$

由于 $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$ 是对 t 积分，所以被积函数中的 x 可以提到外面，即

$$\varphi(x) = x\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

由(2) 式可知，$\varphi'(x)$ 为

$$\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t + 2x^2 f(x^2) \tag{3}$$

将 $\varphi'(1) = 5$ 代入(3) 式，得

$$5 = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + 2f(1) \tag{4}$$

将(1) 式代入(4) 式，得

$$5 = 1 + 2f(1) \tag{5}$$

由(5) 式可解得

$$f(1) = 2 \tag{6}$$

所以本题应填 2。

(11) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $dz|_{(0,0)}=$________。

解：本题是求 $dz|_{(0,0)}$，我们知道 $dz|_{(0,0)}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)}dy$，所以本题实际想考的是求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)}$，现在就来分别求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)}$。

先求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}$。

$e^{x+2y+3z}+xyz=1$，将等式左右两侧同时对 x 求导。

等式左侧 $e^{x+2y+3z}+xyz$ 对 x 求导得：$e^{x+2y+3z}(1+3\frac{\partial z}{\partial x})+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}$。

等式右侧 1 对 x 求导得：0。

所以有 $e^{x+2y+3z}(1+3\frac{\partial z}{\partial x})+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(e^{x+2y+3z}+yz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$。

接下来求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}$，怎么求？有的同学说："直接把 $x=0,y=0$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(e^{x+2y+3z}+yz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$ 中就可以了啊"。可是，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(e^{x+2y+3z}+yz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$ 中还含有 z，怎么办？所以不能直接把 $x=0,y=0$ 代入到 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sin x-1-yz}{e^{z}+xy}$ 中，正确的做法应该是：先把 $x=0,y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中求出 z，然后再把 $x=0,y=0$ 以及求得的 z 代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(e^{x+2y+3z}+yz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$ 中，求出 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}$。

先将 $x=0,y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中，得

$e^{3z}=1$

解得 $z=0$。

再将 $x=0,y=0,z=0$ 代入到 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(e^{x+2y+3z}+yz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$ 中，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}$$

再求 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)}$。

$e^{x+2y+3z}+xyz=1$，将等式左右两侧同时对 y 求导。

等式左侧 $e^{x+2y+3z}+xyz$ 对 y 求导得：$e^{x+2y+3z}(2+3\frac{\partial z}{\partial y})+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}$。

等式右侧 1 对 y 求导得：0。

所以有 $e^{x+2y+3z}(2+3\frac{\partial z}{\partial y})+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$，解得$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(2e^{x+2y+3z}+xz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$。

接下来求$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$，因为$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(2e^{x+2y+3z}+xz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$中还含有$z$，所以不能直接把$x=0,y=0$代入$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(2e^{x+2y+3z}+xz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$中，而应先把$x=0$，$y=0$代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中求出z，再把$x=0,y=0$以及求得的z代入$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(2e^{x+2y+3z}+xz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$中，求出$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$。

先将$x=0,y=0$代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中，得

$e^{3z}=1$

解得$z=0$。

再将$x=0,y=0,z=0$代入$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(2e^{x+2y+3z}+xz)}{3e^{x+2y+3z}+xy}$中，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}$$

现在已经求出了$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}$、$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}$，所以有 $dz\Big|_{(0,0)}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}dy=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$。

所以本题应填$-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$。

（12）设函数$y=y(x)$是微分方程$y''+y'-2y=0$的解，且在$x=0$处$y(x)$取得极值3，则$y(x)=$________。

解：函数$y=y(x)$在$x=0$处$y(x)$取得极值3，由此可知$y(0)=3,y'(0)=0$(之所以$y'(0)=0$，是因为极值点要么是一阶导函数为0的点，要么是不可导点。而对于本题而言，显然函数$y=y(x)$是可导的，所以是一阶导函数为0的点)。

这样，本题就被转化为：求二阶微分方程$y''+y'-2y=0$在初始条件$y(0)=3,y'(0)=0$下的特解。

我们知道，要想求特解，就必须先求通解。

求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法如下。

设$Ay''+By'+Cy=0$是一个二阶常系数齐次线性微分方程，则

第一步：先把y''的系数变为1，即变为$y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$，记$p=\frac{B}{A}$，$q=\frac{C}{A}$。

第二步：解方程$r^2+pr+q=0$。

第三步：写出通解。

情况1. 若第二步解出的r_1、r_2为实根并且$r_1 \neq r_2$，则通解为$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$。

情况2. 若第二步解出的r_1、r_2为实根并且$r_1 = r_2$，则通解为$y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$。

情况3. 若第二步解出的r_1、r_2为复数根$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$，则通解为$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$。

现在我们就严格按照以上三个步骤来求通解。

第一步：先把y''的系数变为1，即变为$y'' + \dfrac{B}{A}y' + \dfrac{C}{A}y = 0$，记$p = \dfrac{B}{A}$，$q = \dfrac{C}{A}$。

对于本题而言，y''的系数本来就是1，所以不用变。并且$p = 1, q = -2$。

第二步：解方程$r^2 + pr + q = 0$。

对于本题而言，要解的是$r^2 + r - 2 = 0$，解得$r_1 = 1, r_2 = -2$。

第三步：写出通解。

情况1. 若第二步解出的r_1、r_2为实根并且$r_1 \neq r_2$，则通解为$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$。

情况2. 若第二步解出的r_1、r_2为实根并且$r_1 = r_2$，则通解为$y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$。

情况3. 若第二步解出的r_1、r_2为复数根$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$，则通解为$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$。

本题属于情况1，所以通解为$y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$。

接下来求在初始条件$y(0) = 3, y'(0) = 0$下的特解(其实就是确定C_1和C_2)。

由于$y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$，所以$y' = C_1e^{x} - 2C_2e^{-2x}$。

把$y(0) = 3$代入$y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$中，得$C_1 + C_2 = 3$。

把$y'(0) = 0$代入$y' = C_1e^{x} - 2C_2e^{-2x}$中，得$C_1 - 2C_2 = 0$。

将$C_1 + C_2 = 3$和$C_1 - 2C_2 = 0$联立，解得$C_1 = 2, C_2 = 1$，代入通解$y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$中，就得到了特解$y = 2e^{x} + e^{-2x}$。

所以本题应填$2e^{x} + e^{-2x}$。

(13) 设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为2、-2、1。$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵，则行列式$|\boldsymbol{B}| =$ ________。

解：我们知道，把矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值代入关于$\boldsymbol{A}$的多项式中去替换$\boldsymbol{A}$，得到的就是关于$\boldsymbol{A}$的多项式的特征值。所以矩阵$\boldsymbol{B}$的三个特征值分别为

$\lambda_1 = 2^2 - 2 + 1 = 3$

$\lambda_2 = (-2)^2 - (-2) + 1 = 7$

$\lambda_3 = 1^2 - 1 + 1 = 1$

一个矩阵的所有特征值之积肯定等于该矩阵所对应的行列式的值，所以行列式$|\boldsymbol{B}| = 3 \times 7 \times 1 = 21$。

所以本题应填21。

（14）设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$，则$P\{XY-Y<0\}=$ ________。

解：在讲解本题之前，先给大家讲两个与二维正态分布有关的结论。

第一个结论：若二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则随机变量$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。

第二个结论：若二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0)$，则随机变量$X$与随机变量$Y$相互独立。

现在再来看本题。

由于二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$，根据上述“第一个结论”可知，随机变量$X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(0,1)$。

由于二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$，根据上述“第二个结论”可知，随机变量X与随机变量Y相互独立。

现在将本题的问题$P\{XY-Y<0\}$整理为

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\} \tag{1}$$

我们知道，两个数相乘小于0，说明这两个数异号，所以有

$$P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1<0,Y>0\}+P\{X-1>0,Y<0\} \tag{2}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$P\{XY-Y<0\}=P\{X-1<0,Y>0\}+P\{X-1>0,Y<0\} \tag{3}$$

由于随机变量X与随机变量Y相互独立，所以有

$$P\{X-1<0,Y>0\}=P\{X-1<0\}P\{Y>0\} \tag{4}$$

$$P\{X-1>0,Y<0\}=P\{X-1>0\}P\{Y<0\} \tag{5}$$

把（4）式、（5）式代入（3）式，得

$$P\{XY-Y<0\}=P\{X-1<0\}P\{Y>0\}+P\{X-1>0\}P\{Y<0\} \tag{6}$$

（6）式可以整理为

$$P\{XY-Y<0\}=P\{X<1\}P\{Y>0\}+P\{X>1\}P\{Y<0\} \tag{7}$$

由（7）式可知，我们现在要求出$P\{X<1\}$、$P\{Y>0\}$、$P\{X>1\}$、$P\{Y<0\}$。

我们知道，若随机变量$X\sim(\mu,\sigma^2)$，则$P\{X>\mu\}=P(X<\mu)=\dfrac{1}{2}$。对于本题而言，由于$X\sim N(1,1)$，所以有$P\{X>1\}=P\{X<1\}=\dfrac{1}{2}$；由于$Y\sim N(0,1)$，所以$P\{Y>0\}=P\{Y<0\}=\dfrac{1}{2}$。

求出 $P\{X<1\}=\frac{1}{2}, P\{Y>0\}=\frac{1}{2}, P\{X>1\}=\frac{1}{2}, P\{Y<0\}=\frac{1}{2}$，代入(7)式，得

$$P\{XY-Y<0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \tag{8}$$

所以本题应填$\frac{1}{2}$。

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若$f(x)$与$g(x)$在$x\to 0$是等价无穷小，求 a、b、k 的值。

解：因为$f(x)$与$g(x)$在$x\to 0$是等价无穷小，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \tag{1}$$

已知

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x \tag{2}$$

$$g(x)=kx^3 \tag{3}$$

将(2)式、(3)式代入(1)式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1 \tag{4}$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}[x+a\ln(1+x)+bx\sin x]=0, \lim\limits_{x\to 0}kx^3=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}$属于“$\frac{0}{0}$”型的极限，可以使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2} \tag{5}$$

(4)式、(5)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=1 \tag{6}$$

下面给大家讲一个定理。

在“$\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{g(x)}=$ 非零常数 C”这个大前提下，若$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$；若$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$

$=0$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$。

对于(6)式而言，等式右侧的1是非零常数，并且可以算出$\lim\limits_{x\to 0}3kx^2=0$，所以根据上述定理有$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x\right]=0$，所以$1+\dfrac{a}{1+0}+0+0=0$，解得$a=-1$。

由于$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x\right]=0$，$\lim\limits_{x\to 0}3kx^2=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$属于“$\dfrac{0}{0}$”型的极限，可以使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}\tag{7}$$

(6)式、(7)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}=1\tag{8}$$

由于(8)式的等式右侧是非零常数，并且$\lim\limits_{x\to 0}6kx=0$，再次使用前述定理有$\lim\limits_{x\to 0}\left[-\dfrac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x\right]=0$，所以$-\dfrac{-1}{(1+0)^2}+2b\cos 0-0=0$，解得$b=-\dfrac{1}{2}$。

由于$\lim\limits_{x\to 0}\left[-\dfrac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x\right]=0$，$\lim\limits_{x\to 0}6kx=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}$属于“$\dfrac{0}{0}$”型的极限，可以使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{(1+x)^3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}\tag{9}$$

(8)式、(9)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{(1+x)^3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}=1\tag{10}$$

由代入法可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{(1+x)^3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}=\frac{-\dfrac{2}{(1+0)^3}-2b\sin 0-b\sin 0-b\times 0\times\cos 0}{6k}\tag{11}$$

(10)式、(11)式相结合，得

$$\frac{-\frac{2}{(1+0)^3}-2b\sin 0-b\sin 0-b\times 0\times\cos 0}{6k}=1 \tag{12}$$

(12)式可以化简为

$$\frac{-2}{6k}=1 \tag{13}$$

由(13)式可解得 $k=-\frac{1}{3}$。

综上所述，有 $a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}$。

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$。

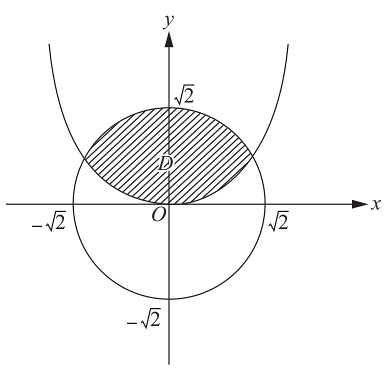
解： 先将二重积分$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$拆解为两个积分，即

$$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

现在分别计算$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$和$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

先来计算$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

先在平面直角坐标系中画出积分区域 D。由于积分区域 D 是区域 $x^2+y^2\leqslant 2$(圆的内部)和区域 $y\geqslant x^2$(抛物线的上部，无限大的区域)的公共部分，所以积分区域 D 的画法如下图所示。

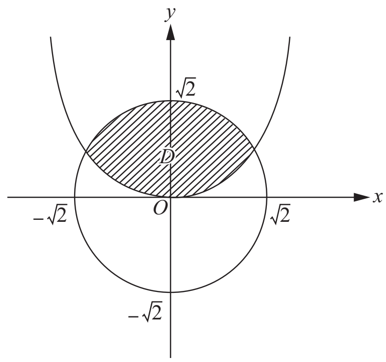


由上图可知，积分区域 D 很明显是关于 y 轴对称的。而二重积分$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的被积函数 xy 明显是关于 x 的奇函数，根据二重积分的对称性可知

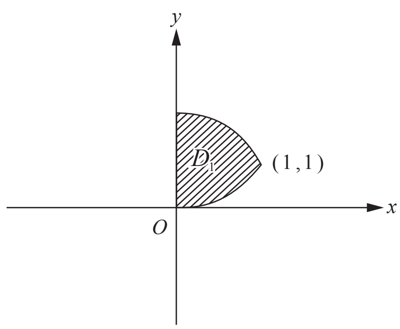
$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

再来计算$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

先在平面直角坐标系中画出积分区域 D。由于积分区域 D 是区域 $x^2+y^2\leqslant 2$（圆的内部）和区域 $y\geqslant x^2$（抛物线的上部，无限大的区域）的公共部分，所以积分区域 D 的画法如下图所示。



由上图可知，积分区域 D 很明显是关于 y 轴对称的。而二重积分$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的被积函数 x^2 明显是关于 x 的偶函数，根据二重积分的对称性可知$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D_1 为下图所示的区域。



有的同学可能不太明白为什么上图中的那个点的坐标是(1,1)，这是由 $x^2+y^2=2$ 和 $y=x^2$ 联立得到的。

由上图可知 $2\iint\limits_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2\mathrm{d}y$，计算得 $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2\mathrm{d}y = \pi - \frac{2}{5}$。即

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi - \frac{2}{5} \tag{3}$$

将(2)式、(3)式代入(1)式得

$$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 + \pi - \frac{2}{5} = \pi - \frac{2}{5} \tag{4}$$

(17)(本题满分 10 分)

为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为该商品的需求量，p 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性($\eta > 0$)。

(Ⅰ)证明定价模型为 $p = \dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$;

(Ⅱ)若该商品的成本函数为 $C(Q) = 1600 + Q^2$，需求函数为 $Q = 40 - p_2$，试由(Ⅰ)中的定价模型确定此商品的价格。

解：先看第(Ⅰ)问。

因为"收益 = 单价 × 数量"，所以总收益 R 为

$$R = PQ \tag{1}$$

收益对价格的弹性为

$$\frac{ER}{EP} = \frac{P}{R} \times \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} \tag{2}$$

大家注意，(2) 式是一个经济学中的基本公式，不是针对本题的，而是针对所有题的一个通用公式。

由(1) 式可以计算出

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} = Q + P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \tag{3}$$

(1) 式可以整理为

$$\frac{P}{R} = \frac{1}{Q} \tag{4}$$

将(3) 式、(4) 式代入(2) 式，得

$$\frac{ER}{EP} = \frac{1}{Q} \times (Q + P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}) \tag{5}$$

(5) 式可以整理为

$$\frac{ER}{EP} = 1 + \frac{P}{Q} \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \tag{6}$$

η 为需求弹性，这说明 $\eta = \dfrac{P}{Q} \times \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$ 或 $\eta = -\dfrac{P}{Q} \times \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$。到底是正还是负呢？由于 $\eta > 0$，所以是负。即

$$\eta = -\frac{P}{Q} \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \tag{7}$$

(7) 式可以整理为

$$-\eta = \frac{P}{Q} \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \tag{8}$$

将(8) 式代入(6) 式，得

$$\frac{ER}{EP} = 1 - \eta \tag{9}$$

收益对需求的弹性为

$$\frac{ER}{EQ} = \frac{Q}{R} \times \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} \tag{10}$$

(10) 式同样是一个经济学中的基本公式，不是针对本题的，而是针对所有题的一个通用公式。

(1) 式可以整理为

$$\frac{Q}{R} = \frac{1}{P} \tag{11}$$

由(1) 式可以计算出

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = P + Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q} \tag{12}$$

将(11) 式、(12) 式代入(10) 式，得

$$\frac{ER}{EQ} = \frac{1}{P} \times (P + Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}) \tag{13}$$

(13) 式可以整理为

$$\frac{ER}{EQ} = 1 + \frac{Q}{P} \times \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q} \tag{14}$$

将(8) 式取倒数得

$$-\frac{1}{\eta} = \frac{Q}{P} \times \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q} \tag{15}$$

将(15) 式代入(14) 式，得

$$\frac{ER}{EQ} = 1 - \frac{1}{\eta} \tag{16}$$

由于 $R = PQ$，所以(10) 式可以整理为

$$\frac{ER}{EQ} = \frac{Q}{PQ} \times \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} \tag{17}$$

(17) 式可以化简为

$$\frac{ER}{EQ} = \frac{1}{P} \times \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} \tag{18}$$

将(16) 式、(18) 式相结合，得

$$\frac{1}{P} \times \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = 1 - \frac{1}{\eta} \tag{19}$$

(19) 式可以整理为

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = P(1 - \frac{1}{\eta}) \tag{20}$$

大家一定要知道一个经济学基本常识：收益对需求的导数(即$\frac{dR}{dQ}$)指的是边际收益。所以对于本题来说，边际收益为$P(1-\frac{1}{\eta})$。

另一个一定要知道的常识就是：当边际收益等于边际成本时，利润最大化。所以对于本题来说，由于边际收益为$P(1-\frac{1}{\eta})$，边际成本也为$P(1-\frac{1}{\eta})$。

因为边际成本是MC，所以有

$$P(1-\frac{1}{\eta}) = MC \tag{21}$$

由(21)式可以解得

$$P = \frac{MC}{1-\frac{1}{\eta}} \tag{22}$$

再来看第(Ⅱ)问。

已知成本函数为$C(Q) = 1600 + Q^2$，大家一定要知道，成本函数C对需求Q求导的结果是边际成本。所以对于本题而言，边际成本为$C'(Q)$，也就是$2Q$。

而在第(Ⅰ)问中已经知道边际成本为$P(1-\frac{1}{\eta})$，所以有

$$2Q = P(1-\frac{1}{\eta}) \tag{23}$$

已知

$$Q = 40 - P \tag{24}$$

将(23)式、(24)式相结合，得

$$2(40-P) = P(1-\frac{1}{\eta}) \tag{25}$$

在第(Ⅰ)问中已经介绍了$\eta = -\frac{P}{Q}\times\frac{dQ}{dP}$，而$Q = 40 - P$，所以

$$\eta = -\frac{P}{40-P}\times\frac{d(40-P)}{dP} = (-1)\times\frac{P}{40-P}\times(-1) = \frac{P}{40-P} \tag{26}$$

将(26)式代入(25)式，得

$$2(40-P) = P(1-\frac{40-P}{P}) \tag{27}$$

由(27)式可解得

$$P = 30 \tag{28}$$

本题已经解答完毕。这种与经济有关的题几乎每年数学三都会考一道，现在我告诉大家六句话，大家以后可以以此来解这类题。

第一句话：大家一定要知道 $R = PQ$。

第二句话：大家一定要知道$\frac{EQ}{EP} = \frac{P}{Q} \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$或$\frac{EQ}{EP} = -\frac{P}{Q} \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$。具体来说，当需求弹性大于 0 时，取负；当需求弹性小于 0 时，取正。

第三句话：大家一定要知道收益对价格的弹性公式$\frac{ER}{EP} = \frac{P}{R} \times \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$，收益对需求的弹性公式$\frac{ER}{EQ} = \frac{Q}{R} \times \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$。

第四句话：大家一定要知道$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} = Q + P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$，$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = P + Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}$。

第五句话：大家一定要知道当边际收益等于边际成本时，利润最大化。

第六句话：大家一定要知道边际成本的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q}$；一定要知道边际收益的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$。

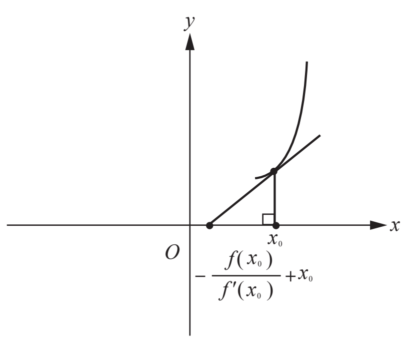
（18）（本题满分 10 分）

设函数$f(x)$在定义域I上的导数大于零，若对任意的$x_0 \in I$，由线$y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线与直线$x = x_0$及x轴所围成区域的面积恒为4，且$f(0) = 2$，求$f(x)$的表达式。

解： 先写出函数$f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线方程。为$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$。

令$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$中的$y = 0$，这样就可以解出该切线与$x$轴的交点坐标。即$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$，解得$x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$。也就是说，曲线$y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线与$x$轴的交点坐标为$\left(-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0, 0\right)$。

题中说“由线$y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线、直线$x = x_0$、x轴这三条线所围成的面积恒为 4”，这三条线围成的图形是什么？很明显是一个直角三角形，示意图如下图所示。



由于三角形的面积恒为4，根据三角形的面积公式，有

$$\frac{1}{2}\times\left[x_0-\left(-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}+x_0\right)\right]\times f(x_0)=4$$

整理得

$$\frac{1}{2}f(x_0)\times\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=4$$

由于x_0是函数$f(x)$在定义域上的任意一点，所以有$\frac{1}{2}f(x)\times\frac{f(x)}{f'(x)}=4$，整理得$y'=\frac{y^2}{8}$，这是一个一阶微分方程。现在来求这个一阶微分方程的通解。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{8} \tag{1}$$

将(1)式改写为

$$\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\mathrm{d}x \tag{2}$$

两边同时进行不定积分，得

$$\frac{1}{y}=-\frac{1}{8}x+C \tag{3}$$

把$f(0)=2$代入(3)式可以解得$C=\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{y}=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$，整理得$y=\frac{8}{-x+4}$。

(19)(本题满分10分)

(Ⅰ)设函数$u(x)$，$v(x)$可导，利用导数定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(Ⅱ)设函数$u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_n(x)$可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出$f(x)$的求导公式。

解：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问是证明题，要求利用导数的定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$。对于导数公式$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$，我相信每一位同学都再熟悉不过了。可是本题让我们用导数的定义来证明这个公式，我们该如何做呢？

首先，令$f(x)=u(x)v(x)$，由导函数的定义式可得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

由于$f(x)=u(x)v(x)$，所以$f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)$，代入(1)式得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

我们知道，$A-B+B$ 必然还等于 A，所以有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

此时可能有的同学要问："为什么要把分子减去 $u(x)v(x+\Delta x)$ 再加上 $u(x)v(x+\Delta x)$ 呢?" 接着往后看就明白了。

由于乘法对加减法满足分配律，所以(3) 式可以写为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+[v(x+\Delta x)-v(x)]u(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

很明显，(4) 式可以拆解为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[v(x+\Delta x)-v(x)]u(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

现在只需分别计算出 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)}{\Delta x}$ 和 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[v(x+\Delta x)-v(x)]u(x)}{\Delta x}$，然后把两者相加即可。

先来计算$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)}{\Delta x}$。

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\times\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)\\
&=u'(x)\times v(x+0)\\
&=u'(x)\times v(x)
\end{aligned}$$

再来计算$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[v(x+\Delta x)-v(x)]u(x)}{\Delta x}$。

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[v(x+\Delta x)-v(x)]u(x)}{\Delta x}\\
&=u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\
&=u(x)\times v'(x)
\end{aligned}$$

将$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)}{\Delta x}=u'(x)\times v(x)$、$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[v(x+\Delta x)-v(x)]u(x)}{\Delta x}=u(x)\times v'(x)$ 代入(5) 式，得

$$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x) \tag{6}$$

由于设$f(x)=u(x)v(x)$，所以有

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \tag{7}$$

再来看第（Ⅱ）问。

第(Ⅱ)问需要借助第(Ⅰ)问证明的公式$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$。有的同学说:"第二问要求写出的是$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$的导数公式,这是$n$项相乘,怎么会能够借助两项相乘的导数公式$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$呢?"

的确,$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$是$n$项相乘的形式,但是我们可以把它转换为两项相乘的形式。怎么转化呢?就令$g(x) = u_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x)$,这样,$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$就变为了$f(x) = u_1(x)g(x)$,这就是两项相乘了。

下面就来推导一下$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$的导数公式。

由于$f(x) = u_1(x)g(x)$,所以

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'_1 g(x) + u_1 g'(x) \\ &= u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1 g'(x) \end{aligned}$$

那么此时有的同学又要问:"$g(x) = u_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x)$,这也是若干项连乘的形式,它的导函数$g'(x)$又该怎么求呢?"

我的回答是:"同理,设$p(x) = u_3(x)u_4(x)\cdots u_n(x)$,这样,$g(x) = u_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x)$就变为了$g(x) = u_2(x)p(x)$,这就是两项相乘。"

接下来也是一样,每求一次导数就设一个辅助函数,直至最后。所以函数$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$的求导公式为

$$\begin{aligned} f'(x) &= [u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]' \\ &= u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u'_2(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u'_n(x) \end{aligned}$$

(20)(本题满分11分)

设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$,且$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$。

(Ⅰ)求a的值。

(Ⅱ)求矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$,其中$\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵,求$\boldsymbol{X}$。

解: 本题有两问,先来看第(Ⅰ)问。

由于矩阵$\boldsymbol{A}$是3阶方阵,根据矩阵乘法可知矩阵$\boldsymbol{A}^3$也是3阶方阵,题中说$\boldsymbol{A}^3$是零矩阵,那么矩阵$\boldsymbol{A}^3$所对应的行列式也肯定是0,即

$$|\boldsymbol{A}^3| = 0 \tag{1}$$

而$|\boldsymbol{A}^3|$可以写为

$$|\boldsymbol{A}^3| = |\boldsymbol{A}| \times |\boldsymbol{A}| \times |\boldsymbol{A}| \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合,得

$$|\boldsymbol{A}| \times |\boldsymbol{A}| \times |\boldsymbol{A}| = 0 \tag{3}$$

由(3) 式可以解得

$$|\boldsymbol{A}| = 0 \tag{4}$$

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 所以

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \tag{5}$$

将(4) 式、(5) 式相结合, 得

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

由(6) 式可以解得

$$a = 0 \tag{7}$$

再来看第(Ⅱ) 问。

已知

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E} \tag{8}$$

(8) 式可以整理为

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{E} \tag{9}$$

(9) 式可以进一步整理为

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{E} \tag{10}$$

将(10) 式的等式左右两侧同时左乘$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$, 同时右乘$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1}$, 得

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1} \tag{11}$$

(11) 式可以整理为

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1} \tag{12}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 所以矩阵 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。

矩阵 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 矩阵$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

将$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$,$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$代入(12)式，得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \tag{13}$$

计算得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix} \tag{14}$$

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$相似于矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$。

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角矩阵。

解: 先看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问是求 a，b。已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}$，可以推出：

① 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式$|\boldsymbol{A}|$等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 所对应的行列式$|\boldsymbol{B}|$。

② 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角线上的三个数字之和等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对角线上的三个数字之和。

根据①有$\begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}$，通过计算可知$\begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=-3+2a$，$\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}=b$，所以有

$$-3+2a=b \tag{1}$$

根据②有$0+3+a=1+b+1$，化简得

$$3+a=2+b \tag{2}$$

将(1)式、(2)式联立，有方程组

$$\begin{cases}-3+2a=b\\3+a=2+b\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$$

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$。我们知道，对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角线上的数就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，而矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的每一列分别为对应的线性无关的特征向量。

所以先要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值。

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$，而在第(Ⅰ)问中已经求出了 $a=4$，所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$。由于 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，所以 $\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -3 \\ -1 & 3-\lambda & -3 \\ 1 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -3 \\ -1 & 3-\lambda & -3 \\ 1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$。

令 $|A-\lambda E|=0$，即 $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -3 \\ -1 & 3-\lambda & -3 \\ 1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0$

根据行列式的计算方法，得：

$(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$(记住，千万不要写成 $\lambda_1=1,\lambda_2=5$，这可是致命性的错误。因为 $(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$ 相当于是 $(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$)。

再来求特征向量，我们要针对不同的特征值求其对应的特征向量。

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时：

齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{\mathbf{0}}$ 变为了 $(\boldsymbol{A}-1\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\mathbf{0}}$，即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\mathbf{0}}$。解出方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\mathbf{0}}$ 的通解即可(但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0)。

(1) 将 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\mathbf{0}}$ 中的 $\boldsymbol{A}$ 化为矩阵的形式并求秩。

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=1$

(2) 判断解的类型。

由于 $r < n$，所以此齐次方程组有无穷多解。

(3) 求解。

$-x_1+2x_2-3x_3=0$。因为 $n-r=2$，所以取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，解得 $x_3=0$；取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$，解得 $x_3=1$。

所以此方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

方程组的通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是任意常数。

所以特征值 1 对应的特征向量为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是不同时为零的任意常数。

现在，$\lambda_1=\lambda_2=1$ 所对应的特征向量已经求解出来了。由此可知，特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 所对应的特征向量有无数个，但是这无数个特征向量所组成的向量组的最大无关组中只含两个向量。也就是说，虽然特征值 1 对应着无数个特征向量，但是从中挑出 $a(a>2)$ 个特征向量，这 a 个特征向量一定是线性相关的。

当 $\lambda_3=5$ 时：

齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 变为 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\boldsymbol{0}}$，其通解即可。(不要忘记通解中的任意常数不能同时为0)。

(1) 将 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 中的 $\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}$ 化为矩阵的形式并求秩。

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=2$

(2) 判断解的类型。

由于 $r < n$，所以此齐次方程组有无穷多解。

(3) 求解。

$$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

因为 $n-r=1$，所以取 $x_2=-1$（当然 x_2 也可以不取 -1 而是取别的数，或者根本不取 x_2 而是取 x_3），解得 $x_1=-1$，$x_3=1$。

所以此方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$。

方程组的通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，其中 k 是任意常数。

所以特征值 5 对应的特征向量为：$k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，其中 k 是不为零的任意常数。

现在，$\lambda_3=5$ 所对应的特征向量已经求解出来了。由此可知，特征值 $\lambda_3=5$ 所对应的特征向量有无数个。但是这无数个特征向量所组成的向量组的最大无关组中只含一个向量。也就是说，虽然特征值 5 对应着无数个特征向量，但是从中挑出 $a(a>1)$ 个特征向量，这 a 个特征向量一定是线性相关的。

综上所述，我们已经求出了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=5$，并且求出了特征值 0 所对应的全部特征向量为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$，特征值 5 所对应的全部特征向量为 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$。

所以，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$（其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$）。

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, x>0\\0, x\leqslant 0\end{cases}$，对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数。

（Ⅰ）求 Y 的概率分布；

（Ⅱ）求 EY。

解：本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

第（Ⅰ）问是求随机变量Y的概率分布。“概率分布”指的是“概率密度函数”吗？不是。大家一定要记住,“概率分布”指的是“分布律”。

请问:一共对X观测了多少次?

这个问题的答案是:不知道,谁也不知道究竟对X观测了多少次。但是有一点可以肯定,那就是至少对X观测了两次(因为题中说直到第2个大于3的观测值出现时停止)。

为方便后续表示,现在引入一个字母,设$A=\{$对X的观测值大于$3\}$。

现在来计算一下$P(A)$。

由于$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, x>0\\ 0, x\leqslant 0\end{cases}$,所以

$$P(A)=P(X>3)=\int_3^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$$

所以随机变量Y的概率分布为

$$P\{Y=n\}=C_{n-1}^1\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}\times\frac{1}{8}=(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}, n=2,3,\cdots$$

鉴于一部分同学还不是很明白为什么随机变量Y的概率分布是上式，所以我详细解释一下。假设一共对X观测了n次，这说明：前$n-1$次对X的观测中，只出现过一次大于3的观测值(剩下$n-2$次对X的观测中出现的观测值都是小于等于3的)，所以是$C_{n-1}^1\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}$,那么对于第$n$次对$X$的观测而言，出现的观测值一定是大于3的(否则就不可能一共只观测n次)，所以是$\frac{1}{8}$，这两个概率相乘就是$C_{n-1}^1\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}\times\frac{1}{8}$,现在大家明白了吧。

还有一些同学可能会问:“既然‘概率分布’指的是‘分布律’，而‘分布律’应该是一张表格啊，本题为什么没画表格呢?”

这个问题其实很好回答，因为本题中随机变量Y可以取无数个值，如果要画表格，那就是一个无限长的表格，那怎么可能画的出来呢？所以用式子来表示。

再来看第（Ⅱ）问。

第（Ⅱ）问求的是随机变量Y的数学期望EY(在已知随机变量Y的分布律的前提下)。已知分布律,数学期望应该怎么求呢？想必所有的同学都会回答:“就是相乘再相加呗。”是的。举个例子来说,比如:

若随机变量X的分布律为

X	1	3	5
P	0.2	0.3	0.5

则随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 为

$E(X)=1\times0.2+3\times0.3+5\times0.5=0.2+0.9+2.5=3.6$。

本题也一样,也是相乘再相加。但是由于随机变量 Y 可以取无数个值，所以肯定得用符号“$\sum$”来表示，即

$$E(Y)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot P\{Y=n\} \tag{1}$$

接下来就都是计算过程了。也就是说，只与“高等数学”有关，而与“概率论与数理统计”无关了。

第（Ⅰ）问已经求出了

$$P\{Y=n\}=(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2} \tag{2}$$

(1) 式、(2) 式相结合,得

$$E(Y)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2} \tag{3}$$

利用高等数学中“无穷级数”的相关知识，构造幂级数，很容易可以算出

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}=16 \tag{4}$$

将(3) 式、(4) 式相结合,得

$$E(Y)=16 \tag{5}$$

(23)（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 θ 为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本。

（Ⅰ）求 θ 的矩估计量;

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量。

解: 本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

第（Ⅰ）问是求 θ 的矩估计量。求矩估计的题，比较简单,因为求矩估计的题有其固定的解题套路，我们只需要生搬硬套就可以了。

不过，鉴于一部分同学还不清楚求矩估计的题的固定解题套路，所以我先来给大家总结一下。

“与矩估计有关的题”的解题方法：看题中所给的分布律或概率密度函数中是含有一个未知参数还是两个未知参数。若此分布律或概率密度函数中只含有一个未知参数 a，按照步

骤 ① 做；若此含有两个未知参数 a 和 b，则按照步骤 ② 做。

① 首先计算出 $E(X)$，记为 $E(X)=A$(A 中必含有未知参数 a)；接着用 $\overline{X}$ 替换 $E(X)$，用 $\hat{a}$ 替换 A 中的未知参数 a，计算 $\hat{a}$，$\hat{a}$ 就是未知参数 a 的矩估计。

② 首先计算出 $E(X)$ 和 $E(X^2)$，记为 $E(X)=A, E(X^2)=B$(A 和 B 中必含有未知参数 a、b)；接着用 $\overline{X}$ 替换 $E(X)$，用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 替换 $E(X^2)$，用 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 替换 A 和 B 中的未知参数 a、b，计算 $\hat{a}$、$\hat{b}$。$\hat{a}$ 就是未知参数 a 的矩估计，$\hat{b}$ 就是未知参数 b 的矩估计。

现在来看第(Ⅰ)问。

由于本题所给的概率密度函数中只含有一个未知参数 θ，所以应该按照前面介绍的"与矩估计有关的题"的解题方法中的步骤 ① 来求解。

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$，由于 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，所以

$$
\begin{aligned}
E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_{\theta}^{1}\frac{x}{1-\theta}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1+\theta}{2}
\end{aligned}
$$

现在用 $\overline{X}$ 替换 $E(X)$，用 $\hat{\theta}$ 替换 θ，然后计算 $\hat{\theta}$ 即可。即 $\overline{X}=\frac{1+\hat{\theta}}{2}$，解得 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$

所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$(其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$)。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求 θ 的最大似然估计量。这也很简单，因为求最大似然估计的题也有其固定的解题套路。

下面我给大家总结一下。

"与最大似然估计有关的题"的解题方法：看题中给的到底是分布律还是概率密度函数，再看一下题中是含有一个未知参数还是两个未知参数。

若题中给的是分布律且只含有一个未知参数 a，则按照步骤 ① 做；若题中给的是分布律且题中含有两个未知参数 a、b，则按照步骤 ② 做；若题中给的是概率密度函数且题中只含有一个未知参数 a，则按照步骤 ③ 做；若题中给的是概率密度函数且题中含有两个未知参数 a、b，则按照步骤 ④ 做。

① 首先需要构造出似然函数 $L(a)$，构造的方法是 $L(a)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;a)$；接着求当 a 取何

值时，似然函数 $L(a)$ 能达到最大值。求得的这个 值就是未知参数 a 的最大似然估计$\hat{a}$。具体来说，求法是：观察,或者对似然函数 $L(a)$ 取对数得 $lnL(a)$ 之后对未知参数 a 求导。

② 首先需要构造出似然函数 $L(a,b)$,构造的方法是 $L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;a,b)$；接着求当 a、b 取何值时，似然函数 $L(a,b)$ 能达到最大值。求得的值就是未知参数 a、b 的最大似然估计$\hat{a}$、$\hat{b}$。

③ 首先需要构造出似然函数$L(a)$,构造的方法是$L(a) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;a)$；接着求当$a$取何值时，似然函数 $L(a)$ 能达到最大值。求得的这个值就是未知参数 a 的最大似然估计$\hat{a}$。

④ 首先需要构造出似然函数$L(a,b)$,构造的方法是$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;a,b)$；接着求当 a、b 取何值时，似然函数 $L(a,b)$ 能达到最大值。求得的这个值就是未知参数 a、b 的最大似然估计$\hat{a}$、$\hat{b}$。

知道了解题套路，就可以正式来看第(Ⅱ)问了。

由于已知概率密度函数，并且此概率密度函数中只有一个未知参数θ，所以我们应该按照解题方法中的步骤 ③ 来求解。

首先构造似然函数 $L(\theta)$。

由于

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以

$$f(x_1;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta \leqslant x_1 \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f(x_2;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta \leqslant x_2 \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$f(x_n;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta \leqslant x_n \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

似然函数 $L(\theta)$ 为

$$L(\theta) = f(x_1) \times f(x_2) \times \cdots \times f(x_n)$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{1}{1-\theta}\right)^n, \theta \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n \leqslant 1 \\ 0, \qquad \text{其他} \end{cases}$$

接下来需要求的是当 θ 取何值时，似然函数 $L(\theta) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{1-\theta}\right)^n, \theta \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n \leqslant 1 \\ 0, \qquad \text{其他} \end{cases}$ 能达到最大值。怎么求呢？可以观察，或者取对数然后求导。

我们先观察一下，能看出来当 θ 取何值时，似然函数 $L(\theta) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{1-\theta}\right)^n, \theta \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n \leqslant 1 \\ 0, \qquad \text{其他} \end{cases}$ 达到最大值吗？可以看出来！似然函数的不为 0 的段是 $\left(\dfrac{1}{1-\theta}\right)^n$，由于 $\theta < 1$，显然 θ 越大，似然函数就越大。但是同时，θ 又必须得小于等于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的任意一项。所以，当 θ 等于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中最小的那一项时，似然函数最大。所以未知参数 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。

2014 年全国硕士研究生
入学统一考试试题及精解

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

（1）设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，且 $a \neq 0$，则当 n 充分大时有(　　)。

（A）$|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$

（B）$|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$

（C）$a_n > a - \dfrac{1}{n}$

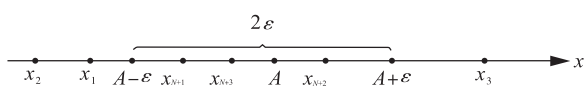
（D）$a_n < a + \dfrac{1}{n}$

解：要想做对本题，就必须知道“数列的极限的定义”，所以现在就先来学习一下“数列的极限的定义”。

对于数列$\{x_n\}$而言，“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ = 常数 A”的意思是：我们心里想任意一个正数 ε，不管 ε 有多么小，总会存在一个正整数 N，使得当 $n \geqslant N$ 时，所有的 x_n 都在区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$内。

以上就是数列的极限的定义。细心的同学应该能发现，我并没有正着讲“若怎么怎么样，则称常数 A 是数列 x_n 的极限”，而是反着说“数列的极限是常数 A 意味着什么什么”。

为了让大家能够彻底明白数列的极限的定义，这里画一个图。



以上就是“数列的极限的定义”，了解之后，我们再来看本题。

由于题中说$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，所以立刻有$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$。根据“数列的极限的定义”立刻可知：我们心里想任意一个正数 ε，ε 有多么小，总会存在一个正整数 N，使得当 $n > N$ 时，所有的$|a_n|$都在区间$(|a|-\varepsilon, |a|+\varepsilon)$内。

我们不妨取 $\varepsilon = 0.000000001$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$就意味着有如下结论成立：总会存在一个正整数 N，使得当 $n > N$ 时，所有的$|a_n|$都在区间$(|a| - 0.000000001, |a| +$

0.000000001）内。

也就是说：当 $n > N$ 时，$|a_n| \in (|a| - 0.000000001, |a| + 0.000000001)$。所以本题应该选择（A）选项。

（2）下列曲线中有渐近线的是(　　)。

(A) $y = x + \sin x$

(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

解：渐近线分为三种，分别是：水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线。

要想做对本题，就必须知道这三种渐近线究竟应该怎么求。所以，我先来给大家讲一下三种渐近线的求法。然后讲解本题。

先来看水平渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，要求该函数的水平渐近线时，需要分 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 两种情况。

$x \to +\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$，若计算出的结果是“常数 a”，则 $y = a$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

$x \to -\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$，若计算出的结果是“常数 b”，则 $y = b$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线（如果“常数 a = 常数 b”，那 $y = a$ 和 $y = b$ 就是同一条水平渐近线）。

再来看铅直渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，要求该函数的铅直渐近线时，需要找一种点。什么点呢？就是：函数 $f(x)$ 在该点处没有定义，但是存在一个该点的左去心邻域(或者存在一个该点的右去心邻域，或者存在一个该点的去心邻域)，函数 $f(x)$ 在该邻域内有定义。

我们把找到的点记为 x_0。

然后计算 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，如果这两者的计算结果中至少有一个是 ∞，那就说明 $x = x_0$ 是函数 $f(x)$ 的铅直渐近线。

最后看斜渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，要求该函数的斜渐近线时，需要分 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 两种情况。

$x \to +\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$，若计算出的结果是“非零常数 a”，就再计算一下 $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$，若计算出的结果是“常数 b”，则 $y = ax + b$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

$x \to -\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$，若计算出的结果是“非零常数 c”，就再计算一下 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - cx]$，若计算出的结果是“常数 d”，则 $y = cx + d$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线。(如果“常数 a = 常数 b”、“常数 c = 常数 d”，那 $y = ax + b$ 和 $y = cx + d$ 就是同一条斜渐近线)。

现在，水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线的求法我已经都给大家讲完了。来看本题。

首先看（A）选项。

（A）选项给的函数是 $y = x + \sin x$。

先看函数 $y = x + \sin x$ 有没有水平渐近线。

$x \to +\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty \neq$ 常数。

$x \to -\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sin x) = -\infty \neq$ 常数。

综上所述，函数 $y = x + \sin x$ 没有水平渐近线。

再看函数 $y = x + \sin x$ 有没有铅直渐近线。

由于函数 $y = x + \sin x$ 根本就不存在没有定义的点，所以没有铅直渐近线。

最后看函数 $y = x + \sin x$ 有没有斜渐近线。

$x \to +\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{x + \sin x}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \dfrac{\sin x}{x}) = 1$。

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{x + \sin x}{x} - 1 \times x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \dfrac{\sin x}{x} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} - \lim\limits_{x \to +\infty} x = 1 + 0 - (+\infty) = -\infty \neq$ 常数。

$x \to -\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\dfrac{x + \sin x}{x}) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 + \dfrac{\sin x}{x}) = 1$。

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\dfrac{x + \sin x}{x} - 1 \times x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 + \dfrac{\sin x}{x} - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin x}{x} - \lim\limits_{x \to -\infty} x = 1 + 0 - (-\infty) = +\infty \neq$ 常数。

综上所述，函数 $y = x + \sin x$ 没有斜渐近线。

由于（A）选项所给的函数既没有水平渐近线、铅直渐近线，也没有斜渐近线，所以

(A)选项所给的函数没有渐近线。本题不能选择(A)选项。

接着看(B)选项。

(B)选项给的函数是 $y = x^2 + \sin x$。

先看函数 $y = x^2 + \sin x$ 有没有水平渐近线。

$x \to +\infty$ 的情况:

$\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2 + \sin x) = +\infty \neq$ 常数。

$x \to -\infty$ 的情况:

$\lim\limits_{x \to -\infty}(x^2 + \sin x) = +\infty \neq$ 常数。

综上所述,函数 $y = x^2 + \sin x$ 没有水平渐近线。

再看函数 $y = x^2 + \sin x$ 有没有铅直渐近线。

由于函数 $y = x^2 + \sin x$ 根本不存在没有定义的点,所以没有铅直渐近线。

最后看函数 $y = x^2 + \sin x$ 有没有斜渐近线。

$x \to +\infty$ 的情况:

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2 + \sin x}{x}\right) = +\infty \neq$ 非零常数。

$x \to -\infty$ 的情况:

$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2 + \sin x}{x}\right) = -\infty \neq$ 非零常数。

综上所述,函数 $y = x^2 + \sin x$ 没有斜渐近线。

由于(B)选项所给的函数既没有水平渐近线、铅直渐近线,也没有斜渐近线,所以(B)选项所给的函数没有渐近线。本题不能选择(B)选项。

接着来看(C)选项。

(C)选项给的函数是 $y = x + \sin\frac{1}{x}$。

先看函数 $y = x + \sin\frac{1}{x}$ 有没有水平渐近线。

$x \to +\infty$ 的情况:

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x + \sin\frac{1}{x}\right) = +\infty \neq$ 常数。

$x \to -\infty$ 的情况:

$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(x + \sin\frac{1}{x}\right) = -\infty \neq$ 常数。

综上所述,函数 $y = x + \sin\frac{1}{x}$ 没有水平渐近线。

再看函数 $y = x + \sin\frac{1}{x}$ 有没有铅直渐近线。

由于 $x=0$ 是函数 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 的没有定义的点，所以需要计算一下 $\lim\limits_{x\to0^+}(x+\sin\frac{1}{x})$ 和 $\lim\limits_{x\to0^-}(x+\sin\frac{1}{x})$。

$\lim\limits_{x\to0^+}(x+\sin\frac{1}{x})=$ 不存在但不为 ∞。

$\lim\limits_{x\to0^-}(x+\sin\frac{1}{x})=$ 不存在但不为 ∞。

综上所述，函数 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 没有铅直渐近线。

最后看函数 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 有没有斜渐近线。

$x\to+\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=1$。

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin\frac{1}{x}-x)=0$。

所以函数 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y=x$。

$x\to-\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=1$。

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sin\frac{1}{x}-x)=0$。

所以函数 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y=x$。

综上所述，函数 $y=x^2+\sin x$ 有斜渐近线 $y=x$。

由于（C）选项所给的函数既虽然没有水平渐近线和铅直渐近线，但有斜渐近线，所以本题应该选择（C）选项。

如果是考试的话，那么大家就不用再看（D）选项了。但现在是讲解习题、学习知识，所以就算已经知道了正确答案，我还是给大家讲一下（D）选项。

最后看（D）选项。

（D）选项给的函数是 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$。

先看函数 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 有没有水平渐近线。

$x\to+\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+\sin\frac{1}{x})=+\infty\neq$ 常数。

$x\to-\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+\sin\frac{1}{x})=+\infty\neq$ 常数。

综上所述，函数 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 没有水平渐近线。

再看函数 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 有没有铅直渐近线。

由于 $x=0$ 是函数 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 的没有定义的点，所以需要计算一下 $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+\sin\frac{1}{x})$ 和 $\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+\sin\frac{1}{x})$。

$\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+\sin\frac{1}{x})=$ 不存在但不为 ∞。

$\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+\sin\frac{1}{x})=$ 不存在但不为 ∞。

综上所述，函数 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 没有铅直渐近线。

最后看函数 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 有没有斜渐近线。

$x\to+\infty$ 的情况：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=+\infty\neq\text{非零常数。}$$

$x\to-\infty$ 的情况：

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=-\infty\neq\text{非零常数。}$$

综上所述，函数 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 没有斜渐近线。

由于（D）选项所给的函数既没有水平渐近线、铅直渐近线，也没有斜渐近线，所以（D）选项所给的函数没有渐近线。本题不能选择（D）选项。

综上所述，本题应该选择（C）选项。

(3) 设 $p(x)=a+bx+cx^2+\mathrm{d}x^3$。当 $x\to 0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是(　　)。

(A) $a=0$

(B) $b=1$

(C) $c=0$

(D) $d=\frac{1}{6}$

解：首先请大家注意，本题是选“错误的”，一定要注意审题。题中说“$x\to 0$ 时，$p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小”，由此可知：在 $x\to 0$ 时，$p(x)-\tan x$ 和 x^3 这两者本身肯定都是无穷小(因为如果连这两者本身都不是无穷小的话，何谈“高阶”)。

现在把“在 $x\to 0$ 时，$p(x)-\tan x$ 和 x^3 这两者本身肯定都是无穷小”这句话拆成两句话，即：

在 $x\to 0$ 时，$p(x)-\tan x$ 是无穷小。

在 $x\to 0$ 时，x^3 是无穷小。

那么由“在 $x\to 0$ 时，$p(x)-\tan x$ 是无穷小”这句话可知

$$\lim_{x\to 0}[p(x)-\tan x]=0 \tag{1}$$

由于题中说 $p(x)a+bx+cx^2+\mathrm{d}x^3$，所以(1)式可以变为

$$\lim_{x\to 0}[a+bx+cx^2+dx^3-\tan x]=0 \tag{2}$$

现在用代入法计算一下 $\lim\limits_{x\to 0}[a+bx+cx^2+dx^3-\tan x]$，由代入法可知

$$\lim_{x\to 0}[a+bx+cx^2+dx^3-\tan x]=a+0+0+0-0 \tag{3}$$

(3)式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}[a+bx+cx^2+dx^3-\tan x]=a \tag{4}$$

将(2)式、(4)式相结合，得

$$a=0 \tag{5}$$

我们继续来看，由于题中说“$x\to 0$ 时，$p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小”，由此可以得到以下式子：

$$\lim_{x\to 0}\frac{p(x)-\tan x}{x^3}=0 \tag{6}$$

由于题中说 $p(x)a+bx+cx^2+\mathrm{d}x^3$，所以(6)式可以变为

$$\lim_{x\to 0}\frac{a+bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=0 \tag{7}$$

当然，刚才已经求出了 $a=0$，所以(7)式可以变为

$$\lim_{x\to 0}\frac{bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=0 \tag{8}$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}$显然是“$\dfrac{0}{0}$型”的函数极限，所以我们可以对其使用洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{b+2cx+3dx^2-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} \tag{9}$$

将(8)式、(9)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{b+2cx+3dx^2-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}=0 \tag{10}$$

现在我来告诉大家一个结论。

在“$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$”这个大前提下，若$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$。

关于以上结论的解释：已知$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则如果单独计算分母的极限是0，那么单独计算分子的极限必然也是0。

回到本题，由于(10)式的等式右侧是0，而显然$\lim\limits_{x\to 0}3x^2=0$，所以由上述结论可知

$$\lim_{x\to 0}\left(b+2cx+3dx^2-\frac{1}{\cos^2 x}\right)=0 \tag{11}$$

现在使用代入法来计算一下$\lim\limits_{x\to 0}\left(b+2cx+3dx^2-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$，由代入法可知

$$\lim_{x\to 0}\left(b+2cx+3dx^2-\frac{1}{\cos^2 x}\right)=b+0+0-1 \tag{12}$$

(12)式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\left(b+2cx+3dx^2-\frac{1}{\cos^2 x}\right)=b-1 \tag{13}$$

将(11)式、(13)式相结合，得

$$b-1=0 \tag{14}$$

由(14)式可解得

$$b=1 \tag{15}$$

把$b=1$代入(10)式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+2cx+3dx^2-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}=0 \tag{16}$$

显然(16)式可以拆解为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2cx}{3x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{3dx^2}{3x^2}=0 \tag{17}$$

由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\cos^2x}}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3dx^2}{3x^2}=d$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2cx}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2c}{3x}$，所以(17)式可以化为

$$\lim_{x\to0}\frac{2c}{3x}-\frac{1}{3}+d=0 \tag{18}$$

要想让(18)式成立，就必有$c=0,d=\dfrac{1}{3}$。

现在我们已经求出了$a=0,b=1,c=0,d=\dfrac{1}{3}$，本题要选的是“错误的”，所以应该选择（D）选项。

（4）设函数$f(x)$具有2阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间$[0,1]$上(　　)。

（A）当$f'(x)\geqslant0$时，$f(x)\geqslant g(x)$

（B）当$f'(x)\geqslant0$时，$f(x)\leqslant g(x)$

（C）当$f''(x)\geqslant0$时，$f(x)\geqslant g(x)$

（D）当$f''(x)\geqslant0$时，$f(x)\leqslant g(x)$

解：我们先设一个辅助函数，设$F(x)=f(x)-g(x)$。

现在来计算一下$F(0)$，计算方法如下。

由于$F(x)=f(x)-g(x)$，所以$F(0)=f(0)-g(0)$。

而题中说$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，所以$g(0)=f(0)(1-0)+f(1)\times0=f(0)$。

由于$g(0=f(0)$，所以$F(0)=f(0)-g(0)=f(0)-f(0)=0$。

现在我们来计算一下$F(1)$，计算方法如下。

由于$F(x)=f(x)-g(x)$，所以$F(1)=f(1)-g(1)$。

而题中说$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，所以$g(1)=f(0)(1-1)+f(1)\times1=f(1)$。

由于$g(1)=f(1)$，所以$F(1)=f(1)-g(1)=f(1)-f(1)=0$。

现在来计算一下$F''(x)$。

由于$F(x)=f(x)-g(x)$，所以$F'(x)=f'(x)+f(0)-f(1)$，所以$F''(x)=f''(x)$。

好，现在来看一下（D）选项。

（D）选项说在区间$[0,1]$上$f''(x)\geqslant0$，由于刚才已经推出了$F''(x)=f''(x)$，所以有：在区间$[0,1]$上$F''(x)\geqslant0$。

由于$F''(x)\geqslant0$，所以说明函数$F'(x)$在区间$[0,1]$上是单调不减的(根据导函数的正负推原函数的单调性)。

之前证出了$F(0)=F(1)$，根据罗尔定理可知，在区间$[0,1]$上存在一点c，使得$F'(c)=0$。

由于函数 $F'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调不减，并且在区间 $[0,1]$ 上存在一点 c 使得 $F'(c) = 0$，所以可以推出以下结论：

当 $0 \leqslant x \leqslant c$ 时，有 $F'(x) \leqslant 0$。

当 $c \leqslant x \leqslant 1$ 时，有 $F'(x) \geqslant 0$。

好，现在我们已经分段判断出了一阶导函数 $F'(x)$ 的正负，接下来继续推导，分“当 $0 \leqslant x \leqslant c$ 时”和“当 $c \leqslant x \leqslant 1$ 时”两种情况。

情况 1：当 $0 \leqslant x \leqslant c$ 时。

由于有 $F'(x) \leqslant 0$，所以可以知道：当 $0 \leqslant x \leqslant c$ 时，$F(x)$ 单调不增。而之前已经算出了 $F(0) = 0$，所以现在可以知道：当 $0 \leqslant x \leqslant c$ 时，$F(x) \leqslant 0$。

情况 2：当 $c \leqslant x \leqslant 1$ 时。

由于有 $F'(x) \geqslant 0$，所以可以知道：当 $c \leqslant x \leqslant 1$ 时，$F(x)$ 单调不减。而之前已经算出了 $F(1) = 0$，所以现在可以知道：当 $c \leqslant x \leqslant 1$ 时，$F(x) \leqslant 0$。

综上所述，有如下结论：

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$F(x) \leqslant 0$。

由于 $F(x) \leqslant 0$，且 $F(x) = f(x) - g(x)$，所以有 $f(x) - g(x) \leqslant 0$，移项得 $f(x) \leqslant g(x)$。所以本题应该选择（D）选项。

（5）行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = $ ________。

（A）$(ad - bc)^2$

（B）$-(ad - bc)^2$

（C）$a^2d^2 - b^2c^2$

（D）$b^2c^2 - a^2d^2$

解：本题很明显是一道送分题，因为至少可以用“最笨的方法”来做，也就是：选择一行或者一列，然后降阶。

这“最笨的方法”谁都会，所以在这里我就不这样做了，而是要告诉大家一种更便捷的方法。

互换行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 的第二行和第三行，得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \tag{1}$$

互换行列式 $-\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 的第一列和第三列，得

$$-\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} \tag{2}$$

将(1) 式、(2) 式相结合，得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} \tag{3}$$

现在记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$，记矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，记矩阵 $\boldsymbol{O}$ 为 $\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$(大家一定要注意，只有零矩阵才可以记成 $\boldsymbol{O}$)。则 $\begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$ 就可以写成

$$\begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \tag{4}$$

将(3) 式、(4) 式相结合，得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \tag{5}$$

现在我要告诉大家两个关于分块行列式计算的公式。

第一个公式：$\begin{vmatrix} A_{n\times n} & O \\ O & B_{m\times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n\times n} & C \\ O & B_{m\times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n\times n} & O \\ C & B_{m\times m} \end{vmatrix} = |A||B|$。

第二个公式：$\begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$。

现在我们就利用第一个公式，可知

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & O \\ O & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \times |\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2 \tag{6}$$

将(5)式、(6)式相结合，得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2 \tag{7}$$

所以本题应该选择（B）选项。

（6）设$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$均为3维向量，则对任意常数$k$、$l$而言，向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+k\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2+l\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$线性无关是向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$线性无关的(　　)。

（A）必要非充分条件

（B）充分非必要条件

（C）充分必要条件

（D）既非充分也非必要条件

解：为了方便表示，我们记$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+k\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_2=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2+l\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$。这样，就有以下等式成立：

$$(\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2)=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+k\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2+l\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}。$$

由于本题既问了“充分性”又问了“必要性”，所以我们既要考察充分性又要考察必要性。

我们先来考察一下必要性，也就是假设$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$线性无关，看能不能推出$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$线性无关。考察必要性如下：

由于向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$线性无关，这就说明向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$的秩为3。

而向量组的秩等于矩阵的秩，所以矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$的秩为3。

而矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$是三阶方阵，那么它的秩为3就说明它是满秩矩阵。

我们都知道，矩阵满秩和矩阵可逆是可以互推的，所以矩阵($\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$) 是可逆矩阵。

那么我们知道，可逆矩阵可以写成若干个初等矩阵的乘积，所以有：($\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$) $=\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2\times\cdots\times\boldsymbol{P}_n$，其中$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$均为初等矩阵。所以($\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$) $=$ ($\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$) $\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}=$

$\boldsymbol{P}_1\times P_2\times\cdots\times\boldsymbol{P}_n\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$。

而初等矩阵在左边乘以某矩阵就相当于给该矩阵进行了一次相应的初等行变换，所以矩阵($\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$) 是矩阵$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$进行了若干次初等行变换之后得到的。

而初等变换是不改变矩阵的秩的，所以矩阵($\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$) 和矩阵$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$的秩一定是相等的。

而无论k,l取何值，矩阵$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$的秩都肯定是2，也就是说矩阵($\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$) 肯定是2。那么向量组$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$的秩就是2，所以向量组$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$线性无关。

我们再来考察一下充分性，也就是假设$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$线性无关，看能不能推出$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$线性无关。考察充分性如下：

由于有“$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$线性无关”和“$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+k\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2+l\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$(其中$k,l$为任意常数)”这两个大前提存在，所以我们完全可以设$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2$线性无关且$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3=\vec{0}$。

鉴于有一部分同学不明白为什么可以这么设，所以我们现在来验证一下：由于$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+k\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_2=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2+l\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$，所以当$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3=\vec{0}$时，有$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_2=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2$。那么，如果$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2$线性无关，则$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$肯定线性无关(因为此时$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1$就是$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$就是$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2$)。

现在已经验证完了，说明设的“$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2$线性无关$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3=\vec{0}$”这个特例没有问题。

那么现在我问大家，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$是线性无关的吗？显然不是。因为$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3=\vec{0}$，一个向量组只要含有零向量，它就一定是线性相关的。

这就说明$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$线性无关根本推不出$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$线性无关，也就是说不满足充分性。

综上所述，由于满足“必要性”而不满足“充分性”，所以向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+k\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2+l\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$线性无关是向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$线性无关的必要非充分条件，所以本题选择(A)选项。

(7) 设随机事件A与B相互独立，且$P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则$P(B-A)=$________。

(A) 0.1

(B) 0.2

(C) 0.3

(D) 0.4

解： 首先告诉大家一个定理，那就是：

若$A_1,A_2,\cdots,A_n$这n个随机事件相互独立，则

(1) 从这n个随机事件中任意抽取r个$(2\leqslant r\leqslant n)$随机事件，则抽取的这$r$个随机事件相互独立。

(2) 把这n个随机事件中的任意r个$(1\leqslant r\leqslant n)$随机事件换成它们的对立事件，则这新组成的$n$个随机事件也相互独立。

本题中说A与B相互独立，那么根据上述定理中的(2)项可知：

$\overline{A}$与B相互独立；

A与$\overline{B}$相互独立；

$\overline{A}$与$\overline{B}$相互独立。

题中明确告诉我们：

$$P(A-B)=0.3 \tag{1}$$

根据概率论学科中的减法公式，有：

$$P(A-B)=P(A\overline{B}) \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，有

$$P(A\overline{B})=0.3 \tag{3}$$

而刚才我们已经推出了A与$\overline{B}$相互独立，所以根据独立性的定义，立刻有

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}) \tag{4}$$

将(3)式、(4)式相结合，有

$$P(A)P(\overline{B})=0.3 \tag{5}$$

题中明确告诉我们

$$P(B)=0.5 \tag{6}$$

而一个随机事件的概率与其对立事件的概率之和肯定是1，所以有

$$P(B)+P(\overline{B})=1 \tag{7}$$

将(6)式、(7)式相结合，得

$$P(\overline{B}) = 0.5 \tag{8}$$

将(5)式、(8)式相结合，立刻可以解得

$$P(A) = 0.6 \tag{9}$$

一个随机事件的概率与其对立事件的概率之和肯定是1，所以有

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \tag{10}$$

将(9)式、(10)式相结合，得

$$P(\overline{A}) = 0.4 \tag{11}$$

根据概率论学科中的减法公式，有：

$$P(B - A) = P(B\overline{A}) \tag{12}$$

而刚才我们已经推出了$\overline{A}$与B相互独立，所以根据独立性的定义，立刻有

$$P(B\overline{A}) = P(B)P(\overline{A}) \tag{13}$$

将(12)式、(13)式相结合，得

$$P(B - A) = P(B)P(\overline{A}) \tag{14}$$

把(6)式、(11)式代入(14)式，立刻可得

$$P(B - A) = 0.5 \times 0.4 = 0.2 \tag{15}$$

所以本题应该选择（B）选项。

(8) 设X_1、X_2、X_3为来自正态总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，则统计量$S = \dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$服从的分布为(　　)。

(A) $F(1,1)$

(B) $F(2,1)$

(C) $t(1)$

(D) $t(2)$

解： 题中说X_1、X_2、X_3为来自正态总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本（“简单随机样本”这六个字与“样本”这两个字的意思是一样的）。我们知道，总体服从什么分布，样本肯定也服从什么分布。所以有：$X_1 \sim N(0,\sigma^2)$，$X_2 \sim N(0,\sigma^2)$，$X_3 \sim N(0,\sigma^2)$。我们还知道，来自同一总体的若干样本肯定是相互独立的，所以有：X_1、X_2、X_3相互独立。

现在我给大家讲一个定理。

若$X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，…，$X_n \sim N(\mu_n,\sigma_n^2)$，且$X_1$、$X_2$、…、$X_n$相互独立，则$c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n \sim N(c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_n\mu_n, c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_n^2\sigma_n^2)$。

现在回到本题上来，由以上定理可知$X_1 - X_2 \sim N(0,2\sigma^2)$，所以必然有$\dfrac{X_1 - X_2 - 0}{\sqrt{2}\sigma} \sim$

$N(0,1)$，化简得

$$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1) \tag{1}$$

由于$X_3\sim N(0,\sigma^2)$，所以必然有$\frac{X_3-0}{\sigma}\sim N(0,1)$，化简得$\frac{X_3}{\sigma}\sim N(0,1)$，所以显然有

$$\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1) \tag{2}$$

现在来复习一下t分布的定义。

设随机变量X和Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，则称$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$服从自由度为$n$的$t$分布，记作$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}\sim t(n)$。

现在回到本题上来，由(1)式、(2)式可知

$$\frac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2/1}}\sim t(1) \tag{3}$$

而(3)式可以化简为

$$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}\sim t(1) \tag{4}$$

所以本题应该选择（C）选项。

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设某商品的需求函数为$Q=40-2P$(P为该商品的价格)，则该商品的边际收益为________。

解：这种与经济有关的题几乎每年的数学三都会考一道，现在我告诉大家六句话，大家以后就用这六句话来解这类题。

第一句话：大家一定要知道$R=PQ$。

第二句话：大家一定要知道$\frac{EQ}{EP}=\frac{P}{Q}\times\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$或$\frac{EQ}{EP}=-\frac{P}{Q}\times\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$。具体来说，当需求弹性大于0时，取负；当需求弹性小于0时，取正。

第三句话：大家一定要知道收益对价格的弹性公式$\frac{ER}{EP}=\frac{P}{R}\times\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$，一定要知道收益对

需求的弹性公式$\frac{ER}{EQ} = \frac{Q}{R} \times \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$。

第四句话：大家一定要知道$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} = Q + P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$，一定要知道$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = P + Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}$。

第五句话：大家一定要知道当边际收益等于边际成本时，利润最大化。

第六句话：大家一定要知道边际成本的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q}$；一定要知道边际收益的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$。

现在我们正式来看本题。

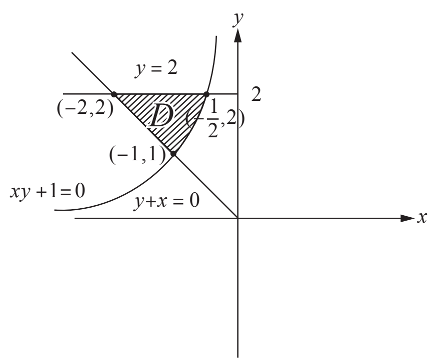
由第一句话可知 $R = PQ$。由于题中说 $Q = 40 - 2P$，所以 $P = \frac{40 - Q}{2}$。把 $P = \frac{40 - Q}{2}$ 代入到 $R = PQ$ 中，得 $R = (\frac{40 - Q}{2})Q$。

由第六句话可知，边际收益的计算方法是$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$。由于$R = (\frac{40 - Q}{2})Q$，所以$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = 20 - Q$。

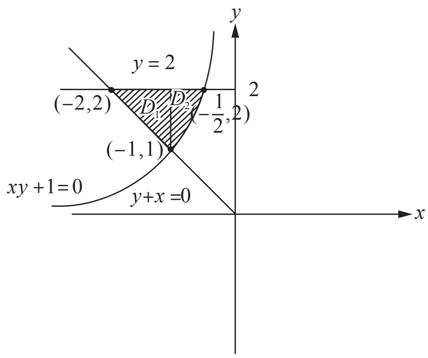
所以本题应填 $20 - Q$。

（10）设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为________。

解：先在平面直角坐标系中画出由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域，如下图所示。



我们要计算的就是阴影区域 D 的面积。现在把阴影区域 D 拆成两个区域 D_1 和 D_2，如下图所示。



我们只需分别计算出区域 D_1 的面积 S_1 和区域 D_2 的面积 S_2，然后把 S_1 和 S_2 加起来就可以了。

由于区域 D_1 是由 $x=-2$、$x=-1$、$y=2$、$y=-x$ 这四条线所围成的，所以区域 D_1 的面积 S_1 为 $S_1=\int_{-2}^{-1}[2-(-x)]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$。

由于区域 D_2 是由 $x=-1$、$x=-\frac{1}{2}$、$y=2$、$y=-\frac{1}{x}$ 这四条线所围成的，所以区域 D_2 的面积 S_2 为 $S_2=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}[2-(-\frac{1}{x})]\mathrm{d}x=1-\ln 2$。

所以 $S_1+S_2=\frac{1}{2}+1-\ln 2=\frac{3}{2}-\ln 2$。

所以本题应填 $\frac{3}{2}-\ln 2$。

(11) 设 $\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，则 $a=$ ________。

解：首先，我们把 $\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ 的被积函数 $x\mathrm{e}^{2x}$ 中的 e^{2x} 挪到 d 的后面，得

$$\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\int_0^a x\mathrm{d}(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}) \tag{1}$$

把 $\int_0^a x\mathrm{d}(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x})$ 的 d 的后面的 $\frac{1}{2}$ 挪到最前面，得

$$\int_0^a x\mathrm{d}(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x})=\frac{1}{2}\int_0^a x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}) \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得

$$\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^a x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}) \tag{3}$$

对 $\frac{1}{2}\int_0^a x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$ 使用分部积分公式，得

$$\frac{1}{2}\int_0^a x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^a - \frac{1}{2}\int_0^a \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \tag{4}$$

通过计算，(4) 式可以化简为

$$\frac{1}{2}\int_0^a x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}) = (\frac{a}{2}-\frac{1}{4})\mathrm{e}^{2a}+\frac{1}{4} \tag{5}$$

将(3) 式、(5) 式相结合，得

$$\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = (\frac{a}{2}-\frac{1}{4})\mathrm{e}^{2a}+\frac{1}{4} \tag{6}$$

题中说

$$\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \tag{7}$$

将(6) 式、(7) 式相结合，得

$$(\frac{a}{2}-\frac{1}{4})\mathrm{e}^{2a}+\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \tag{8}$$

对比(8) 式的等式左右两侧，立刻可知

$$(\frac{a}{2}-\frac{1}{4})\mathrm{e}^{2a} = 0 \tag{9}$$

由(9) 式可解得

$$a = \frac{1}{2} \tag{10}$$

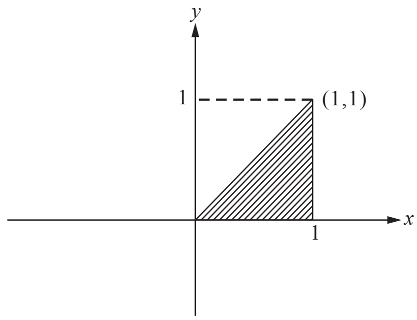
所以本题应填$\frac{1}{2}$。

(12) 二次积分$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 (\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2})\mathrm{d}x =$ ________。

解：大家注意，凡是遇到计算二次积分的题目。一般来说采用的方法都是交换积分次序(如果题中给的是“先 x 后 y 型”积分，那么就要化为“先 y 后 x 型”积分；如果题中给的是“先 y 后 x 型”积分，那么就要化为“先 x 后 y 型”积分)，本题就是如此。

本题给的是“先 x 后 y 型”积分，我们首先要把它化为“先 y 后 x 型”积分。也就是说，要将$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 (\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2})\mathrm{d}x$ 写为$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d (\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2})\mathrm{d}y$。我们要做的就是确定 a、b、c、d。怎么确定呢？大家来看。

由于本题所给的是$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 (\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2})\mathrm{d}x$，也就是说四个上下限是：$y=1$、$y=0$、$x=1$、$x=y$，所以我们在平面直角坐标系中画出由 $y=1$、$y=0$、$x=1$、$x=y$ 这四条线所围成的区域，如下图所示。



现在就根据上图来确定$\int_a^b dx\int_c^d(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dy$中的$a$、$b$、$c$、$d$。由于阴影区域中横坐标的最小值是0，横坐标的最大值是1，所以$a=0,b=1$。如果在上图中画一条平行于y轴且与阴影区域相交的直线，就会发现，虽然这条直线有无数种画法，但该直线一定与阴影区域交出一条线段。该线段上纵坐标的最小值一定是0，该线段上纵坐标的最大值一定是x，所以$c=0$、$d=x$。

现在我们已经确定出了a、b、c、d。所以有

$$\int_0^1 dy\int_y^1(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=\int_0^1 dx\int_0^x(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dy \tag{1}$$

接下来我们只需要计算出$\int_0^1 dx\int_0^x(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dy$就可以了，也就是说先计算出内层的定积分$\int_0^x(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dy$，然后把此计算结果当作外层定积分的被积函数再计算外层的定积分就可以了。计算结果是

$$\int_0^1 dx\int_0^x(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dy=\frac{e-1}{2} \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\int_0^1 dy\int_y^1(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=\frac{e-1}{2} \tag{3}$$

所以本题应填$\frac{e-1}{2}$。

(13)设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数为1，则$a$的取值范围是________。

解：本题中出现了“负惯性指数”一词，我先对这个词简单解释一下。

无论是“正惯性指数”还是“负惯性指数”，都并不是针对一个普通的二次型而言的，而是针对标准形而言的。具体来说，标准形中正平方项的个数称为正惯性指数，负平方项的个数称为负惯性指数。

本题所给的二次型是$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$，这个二次型显然不是标准形，而题中却说它的负惯性指数为1，这显然指的是该二次型所对应的标准形的负惯性指数为1。那么现在我们应该做什么呢？显然应该将题中所给的这个二次型化为标准形。

那么化二次型为标准形的方法是什么呢？有两种：一是正交变换法，二是配方法，我们就用配方法来化吧。

由于这个二次型中含三个未知数，所以我们要配三次。

第一次配方（配x_1）：

关注这六项里面所有含x_1的项：$x_1^2+2ax_1x_3$，我们要将$x_1^2+2ax_1x_3$写为$k(x_1+\Delta)^2+X$的形式，其中常数k的取值与x_1^2的系数一样，$x_1^2+2ax_1x_3$中x_1^2的系数是1，所以$k=1$。

那么Δ该如何确定呢？Δ的求法是$\dfrac{2ax_1x_3}{2kx_1}=\dfrac{2ax_1x_3}{2x_1}=ax_3$。

X的求法呢？用$x_1^2+2ax_1x_3-k(x_1+\Delta)^2$即可，所以$X=x_1^2+2ax_1x_3-(x_1+ax_3)^2=-a^2x_3^2$。

综上所述，$x_1^2+2ax_1x_3$配完后变为$(x_1+ax_3)^2-a^2x_3^2$。

所以

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3\\&=x_1^2+2ax_1x_3-x_2^2+4x_2x_3\\&=(x_1+ax_3)^2-a^2x_3^2-x_2^2+4x_2x_3\end{aligned}$$

第二次配方（配x_2）：

$(x_1+ax_3)^2$是配出来的，我们不用管。现在关注$-a^2x_3^2$、$-x_2^2$、$4x_2x_3$这三项里面含x_2的项：$-x_2^2+4x_2x_3$。我们要将$-x_2^2+4x_2x_3$写为$k(x_2+\Delta)^2+X$的形式，其中常数k的取值与x_2^2的系数一样，$-x_2^2+4x_2x_3$中x_2^2的系数是-1，所以$k=-1$。

那么Δ该如何确定呢？Δ的求法是：$\dfrac{4x_2x_3}{2kx_2}=-2x_3$。

X的求法呢？用$-x_2^2+4x_2x_3-k(x_2+\Delta)^2$即可，所以$X=-x_2^2+4x_2x_3-[-(x_2-2x_3)^2]=4x_3^2$。

综上所述，$-x_2^2+4x_2x_3$配完后变成了$-(x_2-2x_3)^2+4x_3^2$。

所以

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+ax_3)^2-a^2x_3^2-x_2^2+4x_2x_3\\&=(x_1+ax_3)^2-x_2^2+4x_2x_3-a^2x_3^2\\&=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+4x_3^2-a^2x_3^2\\&=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2\end{aligned}$$

第三次配方（配x_3）：

$(x_1+ax_3)^2$、$-(x_2-2x_3)^2$ 是配出来的，我们不用管。现在关注 $(4-a^2)x_3^2$，我们要将 $(4-a^2)x_3^2$ 写为 $k(x_3+\Delta)^2+X$ 的形式，这就不用像前两次配方那么麻烦了，一眼就看出来了，Δ 和 X 都是 0，k 是 $4-a^2$(当然，你要是不嫌麻烦的话，也可以按照前两次配方那么配)。

所以

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$

也就是说：

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$ 就是本题所给的二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 所对应的标准形。

由于题中说 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$ 的负惯性指数为 1，所以在 1、-1、$4-a^2$ 这三个数中只有一个是负数。

而 -1 是负数，所以 $4-a^2$ 就一定不能是负数了(否则负惯性指数就是 2 了)。所以有

$$4-a^2\geqslant 0$$

解得：$-2\leqslant a\leqslant 2$

所以本题应填 $-2\leqslant a\leqslant 2$。

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, \theta<x<2\theta\\ 0, 其他\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则 $c=$ ________。

解： 先来给大家解释一下本题中所出现“无偏估计”一词的意思。

若 $E(b)=a$，则说明 b 是 a 的无偏估计；若 $E(b)\neq a$，则说明 b 不是 a 的无偏估计。

大家现在应该明白了吧，“无偏估计”与“数学期望”息息相关。

本题说 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，所以有：

$$E(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\theta^2 \tag{1}$$

我们知道，对于数学期望而言，前面乘的常数可以提到“$\sum$”之外，所以有

$$E(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=cE(\sum_{i=1}^{n}X_i^2) \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得：

$$cE(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\theta^2 \tag{3}$$

将 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 展开写，得

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \tag{4}$$

将(3) 式、(4) 式相结合，得

$$cE(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) = \theta^2 \tag{5}$$

根据数学期望的性质，有

$$E(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) = E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_n^2) \tag{6}$$

将(5) 式、(6) 式相结合，得

$$c[E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_n^2)] = \theta^2 \tag{7}$$

由于题中说 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 均为来自总体 X 的样本，所以有 $E(X_1^2) = E(X_2^2) = \cdots = E(X_n^2)$，(7) 式可以化简为

$$c[E(X^2) + E(X^2) + \cdots + E(X^2)] = \theta^2 \tag{8}$$

(8) 式可以继续化简为

$$cnE(X^2) = \theta^2 \tag{9}$$

现在来求一下 $E(X^2)$。

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\theta}^{2\theta} \frac{2x^3}{3\theta^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{6\theta^2}(16\theta^4 - \theta^4) = \frac{5}{2}\theta^2 \tag{10}$$

将(10) 式代入(9) 式，得

$$c \times n \times \frac{5}{2}\theta^2 = \theta^2 \tag{11}$$

解得

$$c = \frac{2}{5n} \tag{12}$$

所以本题应填$\frac{2}{5n}$。

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_1^x [t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} - 1) - t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1 + \frac{1}{x})}$。

解：对分母使用等价无穷小可得：

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x [t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} - 1) - t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x [t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} - 1) - t]\mathrm{d}t}{x^2 \times \frac{1}{x}} \tag{1}$$

化简(1)式的分母可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\times\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x} \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x} \tag{3}$$

现在来分别计算一下分母和分子的极限，即计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}x$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt$。通过计算可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}x=\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt=\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}$ 属于“$\frac{\infty}{\infty}$”。我们可以对其使用洛必达法则，也就是分子分母同时求导，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1} \tag{4}$$

将(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1} \tag{5}$$

化简得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x] \tag{6}$$

将(5)式、(6)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x] \tag{7}$$

设 $t=\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$ 变为

$$\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2} \tag{8}$$

将(7)式、(8)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2} \tag{9}$$

现在来分别计算一下分母和分子的极限，即计算$\lim\limits_{t\to 0^+}t^2$和$\lim\limits_{t\to 0^+}(e^t-1-t)$。

通过计算可知$\lim\limits_{t\to 0^+}t^2=0$，$\lim\limits_{t\to 0^+}(e^t-1-t)=0$，所以$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{e^t-1-t}{t^2}$属于“$\dfrac{0}{0}$”，我们可以对其使用洛必达法则，也就是分子分母同时求导，得

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{2t} \tag{10}$$

将(9)式、(10)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{2t} \tag{11}$$

对$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{e^t-1}{2t}$的分子使用等价无穷小，得

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \tag{12}$$

将(11)式、(12)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2} \tag{13}$$

(16)（本题满分 10 分）

设平面区域$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，计算$\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$。

解：由于本题会用到二重积分的轮换对称性，所以我先来给大家讲一下。

二重积分的轮换对称性指的是：把二重积分的积分区域中的x、y互换，再把二重积分的被积函数中的x、y互换，所得到的新二重积分与原二重积分相等。

那么对于本题而言，由轮换对称性可知：

$$\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint_S\frac{y\sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})}{y+x}dxdy \tag{1}$$

其中，区域$S=\{(x,y)\mid 1\leqslant y^2+x^2\leqslant 4,y\geqslant 0,x\geqslant 0\}$。

对比区域D和区域S就会发现，这两个区域其实是同一个区域，所以(1)式可以变为

$$\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})}{y+x}dxdy \tag{2}$$

现在在(2)式的等式左右两侧同时加上$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，得

$$2\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{(x+y)\sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

(3)式可以化简为

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

现在计算一下$\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由于积分区域$D$是圆环的一部分，所以我们用极坐标来计算。有

$$\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{y^2+x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\sin\pi r\mathrm{d}r=-\frac{3}{4} \tag{5}$$

将(4)式、(5)式相结合，得

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{4} \tag{6}$$

(17)(本题满分10分)

设函数$f(u)$具有连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$满足$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x$。若$f(0)=0$，求$f(u)$的表达式。

解：本题告诉我们$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x$，那么现在我想问大家：$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}$还等于什么？有的同学不太明白我的意思，那我就具体解释一下。

的确，题中明显告诉了我们$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}$等于$(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x$，可是这$(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x$并不是根据$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$算出的$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}$。也就是说，我们可以通过题中所给的$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$计算出$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}$，而我们计算出的结果与题中所给的$(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x$这两者肯定是相等的，这正是本题的解题思路。

知道了本题的解题思路以后，现在我们需要做的就是根据题中所给的$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$来求出$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}$。

要想求出$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}$，就要分别求出$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

由于题中给的$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$是一个抽象的函数，并且f后面括号里出现的并不是单一

的字母，所以我们需要把它设成单一的字母，即：设 $u=e^x\cos y$。这样一来，$z=f(e^x\cos y)$ 就变成了 $z=f(u)$。

所以有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)(-e^x\sin y)$$

由此可得

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x$$

现在我们已经计算出了 $\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x$，而题中也给了 $\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x$，所以有

$$f'(u)e^x=(4z+e^x\cos y)e^x$$

化简得

$$f'(u)=4z+e^x\cos y$$

而题中很明显地告诉我们 $z=f(e^x\cos y)$，所以有

$$f'(u)=4f(e^x\cos y)+e^x\cos y$$

之前已经设了 $u=e^x\cos y$，所以有

$$f'(u)=4f(u)+u$$

移项得

$$f'(u)-4f(u)=u$$

为了方便表示，设 $t=f(u)$，则有

$$t'-4t=u$$

请问 $t'-4t=u$ 是什么？这明显是一个一阶微分方程（只不过不是含 x 和 y 的微分方程，而是含 u 和 t 的微分方程），现在来求其通解。

很容易求得微分方程 $t'-4t=u$ 的通解为 $t=Ce^{4u}-\frac{u}{4}-\frac{1}{16}$。现在我们就差最后一步：根据题中所给的 $f(0)=0$ 确定 $Ce^{4u}-\frac{u}{4}-\frac{1}{16}$ 中的 C。

由于 $f(0)=0$，所以 $C-\frac{1}{16}=0$，解得 $C=\frac{1}{16}$。

所以 $f(u)=\frac{1}{16}e^{4u}-\frac{u}{4}-\frac{1}{16}$。

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数。

解：本题有两问，第一问是求"收敛域"，第二问是求"和函数"。我现在问大家，如果本题只让求"和函数"而没让求"收敛域"的话，那么是否需要求"收敛域"？有的同学心想，当然就不用了。事实上，就算题中只让我们求"和函数"，我们也必须求"收敛域"。这是因为：要求"和函数"，就必须写出"和函数"的定义域，而"和函数"的定义域就是"收敛域"。

我们先来求收敛域。

本题所给的幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，$a_n=(n+1)(n+3)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1+1)(n+1+3)}{(n+1)(n+3)}\right|=1$$

也就是说，收敛区间为 $(-\frac{1}{1},\frac{1}{1})$，即 $(-1,1)$

到现在为止，我们求完收敛域了吗？并没有。求出的只是收敛区间，还要再判断一下收敛区间的端点 -1 和 1。

当 $x=1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 成为常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)$，现在判断一下常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)$ 的敛散性。常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)$ 明显是一个正项级数(每一项都是正的)，所以我们要利用正项级数的敛散性判别法来判断一下 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)$ 是收敛的还是发散的。由于 $\lim_{n\to\infty}(n+1)(n+3)=\infty\neq0$，所以常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)$ 是发散的，收敛域不包括 1 这点。

当 $x=-1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 成为常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)$，现在判断一下常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)$ 的敛散性。常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)$ 明显是一个交错级数，所以我们要利用交错级数的敛散性判别法判断一下 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)$ 是收敛的还是发散的。显然交错级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)$ 是发散的，所以收敛域不包括 -1 这点。

综上所述，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$。

再来求和函数。

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，显然有 $S(x)=[\int_0^x S(t)\mathrm{d}t]'$。

先求$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t$。由于 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，所以 $S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)t^n$，可得

$$\begin{aligned}\int_0^x S(t)\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)t^n\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[\int_0^x (n+1)(n+3)t^n\mathrm{d}t] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1} \\ &= [\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}]'+\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1} \\ &= \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x} \\ &= \frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

所以 $S(x)=[\int_0^x S(t)\mathrm{d}t]'=[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}]'=\frac{3-x}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$。

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$。证明：

（Ⅰ）$0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a$，$x\in[a,b]$。

（Ⅱ）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$。

解：先来看第（Ⅰ）问。

第（Ⅰ）问要证明的是$0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a$，由于$0=\int_a^x 0\mathrm{d}t$，$x-a=\int_a^x 1\mathrm{d}t$，所以第（Ⅰ）问相当于证明的是$\int_a^x 0\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t$。

由于$\int_a^x 0\mathrm{d}t$、$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$、$\int_a^x 1\mathrm{d}t$ 这三者的积分区域一样，所以我们只需比较被积函数的大小就可以了，被积函数的大小就是积分值的大小。

由于题中明确地告诉我们 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$，所以有 $0\leqslant g(t)\leqslant 1$（只是换了一个字母而

已)，所以有$\int_a^x 0\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x 1\mathrm{d}t$，所以有$0 \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x - a$。

再来看第（Ⅱ）问。

第（Ⅱ）问要证明的是$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$，我们设一个辅助函数，设$F(u) = \int_a^u f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_a^{a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x$。最后只要证明$F(b) \geqslant 0$即可(因为$F(b) \geqslant 0$就意味着$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$，进而就意味着$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$)。

由于$F(u) = \int_a^u f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_a^{a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x$，所以有$F'(u) = f(u)g(u) - f(a + \int_a^u g(t)\mathrm{d}t)g(u)$

将$F'(u)$化简可得

$F'(u) = g(u)[f(u) - f(a + \int_a^u g(t)\mathrm{d}t)]$

由第(Ⅰ)问的结论可知$0 \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x - a$，同时加上一个$a$得$a \leqslant a + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x$，把$x$换成$u$得$a \leqslant a + \int_a^u g(t)\mathrm{d}t \leqslant u$。

由于$a \leqslant a + \int_a^u g(t)\mathrm{d}t \leqslant u$，而题中说$f(x)$单调增加，所以有$f(u) - f(a + \int_a^u g(t)\mathrm{d}t) > 0$。又因为$g(u) \geqslant 0$，所以有$F'(u) = g(u)[f(u) - f(a + \int_a^u g(t)\mathrm{d}t)] \geqslant 0$，这说明函数$F(u)$在区间$[a,b]$上单调不减。

刚才我们设的辅助函数是$F(u) = \int_a^u f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_a^{a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x$，所以$F(a) = 0$。

综上所述，由于函数$F(u)$在区间$[a,b]$上单调不减且$F(a) = 0$，所以$F(b) \geqslant 0$。

(20)（本题满分 11 分）

设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$为 3 阶单位矩阵。

（Ⅰ）求方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{0}}$的一个基础解系。

（Ⅱ）求满足$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$的所有矩阵$\boldsymbol{B}$。

解：本题有两问，我们先来看第（Ⅰ）问。

首先，由于方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{0}}$的等式右侧是$\vec{\boldsymbol{0}}$，所以方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{0}}$是一个齐次方程组，所以只需按照求齐次方程组通解的方法来求解本题就可以了。

鉴于有一部分同学忘记了求齐次方程组通解的方法，现在就先来给大家复习一下。

求齐次方程组通解分为以下三个步骤。

(1) 写出所给方程组对应的矩阵并求出矩阵的秩。

(2) 判断解的类型。具体的判断方法如下：

① 若 $r=n$，则该齐次方程组有唯一零解，不用再进行步骤(3) 了。

② 若 $r<n$，则该齐次方程组有非唯一解(也就是非零解、无穷多解)，并且需要进行步骤(3)。

注意：其中 n 为方程组中所含的未知数的个数(千万别把 n 记为方程个数)，r 为步骤(1) 所求出的矩阵的秩。

(3) 计算 $n-r$，设 $n-r=A$，则说明 n 个未知数中有 A 个可以自由取值，并且取 A 组(注意：取的这 A 组向量必须线性无关，比如：取的这 A 组向量中不能含零向量，不能含相等的向量，不能含成比例的向量)，则齐次方程组的通解为 A 组向量的任意线性组合。

以上就给大家复习完求解齐次方程组通解的方法，接下来我们就严格按照以上这三个步骤来解这道题。

(1) 写出所给方程组对应的矩阵并且求出矩阵的秩。

矩阵为：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$

然后求秩，具体过程就不详细说了。此题化阶梯形需要四步。

因为：$2(3-1)=4$。

经过化阶梯形的四个步骤后，系数矩阵

$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$变为了$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&3\end{pmatrix}$

所以秩为 3，即 $r=3$。

(2) 判断解的类型。

未知数个数 $n=4$(因为题中所给的矩阵有四列，列数等于未知数个数)，秩 $r=3$。由于 $r<n$，所以此方程组有无穷多解，并且进行第三步。

(3) 求解。

$n-r=4-3=1$，说明四个未知数中有一个未知数可以自由取值并且取一组，那么到底四个未知数中的哪两个可以自由取值呢？(我说四个未知数中有一个未知数可以自由取

值，但我可没有说是四个中任意找一个。）

这时就需要借助阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\0 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

将此矩阵还原为方程组，得

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0\\x_2-x_3+x_4=0\\x_3-3x_4=0\end{cases}$$

现在我们就通过此方程组来观察 x_1、x_2、x_3、x_4 中哪一个未知数可以自由取值。

可以是 x_4 吗？我们来验证一下。怎么验证？很简单，就是假设 x_4 已知，看能不能解出 x_1、x_2、x_3。x_4 一旦定了，把 x_4 代入到 $x_3-3x_4=0$ 中，就可以确定 x_3。再把 x_3、x_4 代入 $x_2-x_3+x_4=0$ 中，确定 x_2。现在 x_2、x_3、x_4 我们都知道了。那么把 x_2、x_3、x_4 代入到 $x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0$ 中，就可以确定 x_1。大家看，我们根据 x_4 解出了其他未知数 x_1、x_2、x_3，所以自由取值的那个未知数可以是 x_4。

可以是 x_3 吗？我们来验证一下。假设 x_3 已知，看能不能解出 x_1、x_2、x_4。x_3 一旦定了，把 x_3 代入到 $x_3-3x_4=0$ 中，就可以确定 x_4。再把 x_3、x_4 代入到 $x_2-x_3+x_4=0$ 中，就可以确定 x_2。现在 x_2、x_3、x_4 我们都知道了。那么把 x_2、x_3、x_4 代入到 $x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0$ 中，就可以确定 x_1。大家看，我们根据 x_3 解出了其他未知数 x_1、x_2、x_4，所以自由取值的那个未知数可以是 x_3。

可以是 x_2 吗？假设 x_2 已知，把 x_2 代入到方程 $x_2-x_3+x_4=0$ 中，这样方程 $x_2-x_3+x_4=0$ 中出现的未知数就只剩下 x_3 和 x_4 了，而方程 $x_3-3x_4=0$ 中也是只含 x_3 和 x_4，这两个方程联立，可以解出 x_3 和 x_4。现在 x_2、x_3、x_4 我们都知道了。把 x_2、x_3、x_4 代入到 $x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0$ 中，就可以确定 x_1。大家看，我们根据 x_2 解出了其他未知数 x_1、x_3、x_4，所以自由取值的那个未知数可以是 x_2。

可以是 x_1 吗？假设 x_1 已知，把 x_1 代入到方程 $x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0$ 中，方程 $x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0$ 中出现的未知数就只剩下 x_2、x_3 和 x_4 了，再配合另外两个方程 $x_2-x_3+x_4=0$ 和 $x_3-3x_4=0$，就是三个方程三个未知数，用克拉默法则就能解出 x_2、x_3、x_4。大家看，我们根据 x_1 解出了其他所有的未知数 x_2、x_3、x_4，所以自由取值的那个未知数也可以是 x_1。

综上，我们知道了可以自由取值的那个未知数可以是 x_1、x_2、x_3、x_4。但是大家要注意，这是我们判断出来的，不是想当然得来的。

既然 x_1、x_2、x_3、x_4 都可以自由取值，那我们究竟取选一个呢？随便，取哪个都行。我们不妨就选 x_4 吧。

按前述的步骤(3)，先计算 $n-r$，$n-r=A$，计算目的有两个：一是说明 n 个未知数中

有 A 个可以自由取值，二是说明需要取 A 组。

此题中，$A=n-r=1$，说明需要取一组 x_4 就可以了。不妨取 $x_4=1$，那么根据方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \\ x_3-3x_4=0 \end{cases}$$

可以解得 $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \end{cases}$

所以方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 的一个基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，第（Ⅰ）问就解答完了。

再来看第（Ⅱ）问。

第（Ⅱ）问求的是满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$，由于 $\boldsymbol{A}$ 是 3 行 4 列的矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 3 行 3 列的矩阵，所以 $\boldsymbol{B}$ 必然是 4 行 3 列的矩阵。不妨设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$。

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 可以转化为以下三个非齐次方程组

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \\ j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \\ l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

我们只需通过第一个方程组解出 a、d、j、g，通过第二个方程组解出 b、e、h、k，通过第三个方程组解出 c、f、i、l 就可以了。

具体解的过程在这里就不再赘述了，最后的答案为

$$B=\begin{pmatrix} 2-c_1 & 6-c_2 & -1-c_3 \\ -1+2c_1 & 3+2c_2 & 1+2c_3 \\ -1+3c_1 & -4+3c_2 & 1+3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

其中，c_1、c_2、c_3 为任意常数。

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似。

解: 先告诉大家两个性质。

① 相似具有对称性。即:若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$。

② 相似具有传递性。即:若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$。

记矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$为矩阵 $\boldsymbol{A}$,记矩阵$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$为矩阵 $\boldsymbol{B}$,本题要求证明的是 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。实际上,只需证明"矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似于对角矩阵,并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值一样"就可以了。为什么呢?就是根据前面提到的两个性质。下面来具体解释一下。

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似于对角矩阵,就可以设 $\boldsymbol{A} \sim \Lambda_1$,$\boldsymbol{B} \sim \Lambda_2$。由于相似具有对称性,所以由 $\boldsymbol{B} \sim \Lambda_2$ 可得 $\Lambda_2 \sim \boldsymbol{B}$。

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值一样,就有 $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$,即 $\boldsymbol{A} \sim \Lambda$,$\Lambda \sim \boldsymbol{B}$。由于相似具有传递性,所以由 $\boldsymbol{A} \sim \Lambda$,$\Lambda \sim \boldsymbol{B}$ 可得 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。

所以只需证明"矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似于对角矩阵,并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值一样"即可。

首先来证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似于对角矩阵,证明方法如下。

先看矩阵 $\boldsymbol{A}$。

由于矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$是实对称矩阵,所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似于对角矩阵。

再看矩阵 $\boldsymbol{B}$。

先求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值。由于矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$是上三角矩阵,其特征值必为

对角线上的数，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为：$n-1$ 个 0，1 个 n。

再通过计算可知特征值0 对应的线性无关的特征向量一共有 $n-1$ 个，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可以相似于对角矩阵。

再来证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值一样，证明方法如下。

先看矩阵 $\boldsymbol{A}$。

将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$化为阶梯型矩阵。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

很明显，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=1$，而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又是实对称矩阵，我们知道对于实对称矩阵而言，有且仅有 $n-r$ 个特征值为 0。所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $n-1$ 个特征值为 0。由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，所以肯定有 n 个特征值。那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 剩下的那个特征值是多少呢？显然是 n。这是因为：对于任何一个方阵而言，其所有特征值之和等于对角线元素之和，由这个性质可以很快解出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 剩下的那个特征值是 n。

综上所述，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为：$n-1$ 个 0，1 个 n。

再看矩阵 $\boldsymbol{B}$。

由于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$是上三角矩阵，其特征值必为对角线上的数，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为：$n-1$ 个 0，1 个 n。

现在我们既证明了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似于对角矩阵，又证明了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值一样，所以有 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$。

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$。在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$。

（Ⅰ）求的 Y 分布函数 $F_Y(y)$；

（Ⅱ）求 EY。

解：本题有两问，我们先来看第（Ⅰ）问。

第（Ⅰ）问求的是 Y 分布函数 $F_Y(y)$。

我们只需按照分布函数的定义来求即可，具体方法如下。

由分布函数的定义直接可得　$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\}$　　(1)

由于 X 只能取 1 和 2(因为 X 等于 1 的概率加上 X 等于 2 的概率得 1)，所以有

$$P\{Y \leqslant y\} = P\{Y \leqslant y, X = 1\} + P\{Y \leqslant y, X = 2\} \tag{2}$$

(1) 式、(2) 式相结合，得

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y, X = 1\} + P\{Y \leqslant y, X = 2\} \tag{3}$$

由条件概率公式可得

$$P\{Y \leqslant y, X = 1\} = P\{X = 1\}P\{Y \leqslant y \mid X = 1\} \tag{4}$$

$$P\{Y \leqslant y, X = 2\} = P\{X = 2\}P\{Y \leqslant y \mid X = 2\} \tag{5}$$

将(4) 式、(5) 式代入(3) 式，可得

$$F_Y(y) = P\{X = 1\}P\{Y \leqslant y \mid X = 1\} + P\{X = 2\}P\{Y \leqslant y \mid X = 2\} \tag{6}$$

下面就可以正式开始计算了。

情况 1：当 $y \leqslant 0$ 时。

由于在给定 $X = i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i = 1,2)$，所以当 $y \leqslant 0$ 时，$P\{Y \leqslant y \mid X = 1\}$ 和 $P\{Y \leqslant y \mid X = 2\}$ 均为 0，所以 $F_Y(y) = 0$。

情况 2：当 $0 \leqslant y < 1$ 时。

由于在给定 $X = i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i = 1,2)$，所以当 $0 \leqslant y < 1$ 时，$P\{Y \leqslant y \mid X = 1\} = y$，$P\{Y \leqslant y \mid X = 2\} = \frac{1}{2}y$，所以

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} \times y + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}y$$

情况 3：当 $1 \leqslant y < 2$ 时。

由于在给定 $X = i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i = 1,2)$，所以当 $0 \leqslant y < 1$ 时，$P\{Y \leqslant y \mid X = 1\} = 1$，$P\{Y \leqslant y \mid X = 2\} = \frac{1}{2}y$，所以

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y$$

情况 4：当 $y \geqslant 2$ 时。

由于在给定 $X = i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i = 1,2)$，所以当 $y \geqslant 2$ 时，$P\{Y \leqslant y \mid X = 1\} = 1$，$P\{Y \leqslant y \mid X = 2\} = 1$，所以

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = 1$$

综上所述，有 $F_Y(y)=\begin{cases}0, y<0\\ \dfrac{3}{4}y, 0\leqslant y<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}y, 1\leqslant y<2\\ 1, y\geqslant 2\end{cases}$

再来看第（Ⅱ）问。

第（Ⅱ）问求的是随机变量 Y 的数学期望 EY。我们知道，$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y$。所以要想求 EY，就要先求出随机变量 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$。刚才已经求出了随机变量 Y 的分布函数 $F_Y(y)=\begin{cases}0, y<0\\ \dfrac{3}{4}y, 0\leqslant y<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}y, 1\leqslant y<2\\ 1, y\geqslant 2\end{cases}$，所以随机变量 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$ 为

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, 0\leqslant y<1\\ \dfrac{1}{4}, 1\leqslant y<2\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

好，现在已经求出了随机变量 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$。所以

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{3}{4}y\mathrm{d}y+\int_1^2\frac{1}{4}y\mathrm{d}y=\frac{3}{4}$$

(23)（本题满分 11 分）

设随机变量 X,Y 的概率分布相同，X 的概率分布为 $P(X=0)=\dfrac{1}{3}, P(X=1)=\dfrac{2}{3}$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{2}$。

（Ⅰ）求 (X,Y) 的概率分布。

（Ⅱ）求 $P(X+Y\leqslant 1)$。

解：先来看第（Ⅰ）问。

首先要告诉大家的是，“概率分布”这四个字指的是“分布律”，所以第（Ⅰ）问求的是随机变量 (X,Y) 的联合分布律（其实就是画一个表格）。

由于 X 的概率分布为 $P(X=0)=\dfrac{1}{3}, P(X=1)=\dfrac{2}{3}$，并且随机变量 X,Y 的概率分布

相同，可以知道随机变量 Y 的概率分布为 $P(Y=0)=\frac{1}{3}, P(Y=1)=\frac{2}{3}$。我们可以画出以下表格

$X \backslash Y$	0	1	
0	a	b	$\frac{1}{3}$
1	c	d	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

现在就是要求出 a、b、c、d。

其实只要求出 d，那么 a、b、c 自然也就求出来了(因为由分布律可知 $b=\frac{2}{3}-d$，$c=\frac{2}{3}-d$，$a=\frac{1}{3}-b$)。以下是 d 的求解过程。

先写出随机变量 XY 的分布律(也就是画一张表格)。怎么求呢?

先找出随机变量 XY 可能取的值。由于 X 的可能取值是 0 和 1，Y 的可能取值也是 0 和 1，所以 X 乘以 Y(也就是 XY) 的可能取值只有两个，分别是 $XY=0$ 和 $XY=1$。

再求 $XY=0$ 和 $XY=1$ 的概率。由于 $XY=0$，或者是 $X=0$ 且 $Y=0$，或者是 $X=0$ 且 $Y=1$，或者是 $X=1$ 且 $Y=0$。$X=0$ 且 $Y=0$ 的概率是 a，$X=0$ 且 $Y=1$ 的概率是 b，$X=1$ 且 $Y=0$ 的概率是 c，所以 $XY=0$ 的概率是 $a+b+c$；由于 $XY=1$ 是因为 $X=1$ 且 $Y=1$，因为 $X=1$ 且 $Y=1$ 的概率是 d，所以 $XY=1$ 的概率是 d。

综上所述，随机变量 XY 的分布律为

XY	0	1
P	$a+b+c$	d

现在根据此分布律来求随机变量 XY 的数学期望。

随机变量 XY 的数学期望 $E(XY)$ 为

$$E(XY)=0\times(a+b+c)+1\times d=d \tag{1}$$

由于随机变量 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

所以随机变量 X 的数学期望为

$$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \tag{2}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \tag{3}$$

我们知道

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \tag{4}$$

把(2)式、(3)式代入(4)式，得

$$D(X)=\frac{2}{3}-(\frac{2}{3})^2=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9} \tag{5}$$

由于随机变量 Y 的分布律为

Y	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

所以随机变量 Y 的数学期望为

$$E(Y)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \tag{6}$$

$$E(Y^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \tag{7}$$

我们知道

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2 \tag{8}$$

把(6)式、(7)式代入(8)式，得

$$D(Y)=\frac{2}{3}-(\frac{2}{3})^2=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9} \tag{9}$$

我们知道，相关系数的公式为

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\times\sqrt{D(Y)}} \tag{10}$$

而

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y) \tag{11}$$

将(10)式、(11)式相结合，得

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\times\sqrt{D(Y)}} \tag{12}$$

由于随机变量 X 与随机变量 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$，所以(12)式可以变为

$$\frac{1}{2}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\times\sqrt{D(Y)}} \tag{13}$$

将刚才求得的$E(XY)=d, E(X)=\frac{2}{3}, E(Y)=\frac{2}{3}, D(X)=\frac{2}{9}, D(Y)=\frac{2}{9}$代入到(13)式中，得

$$\frac{1}{2}=\frac{d-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{9}}\times\sqrt{\frac{2}{9}}} \tag{14}$$

由(14)式可以解得$d=\frac{5}{9}$。

所以

$b=\frac{2}{3}-d=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}=\frac{1}{9}$

$c=\frac{2}{3}-d=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}=\frac{1}{9}$

$a=\frac{1}{3}-b=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

综上所述，有$a=\frac{2}{9}, b=\frac{1}{9}, c=\frac{1}{9}, d=\frac{5}{9}$。所以$(X,Y)$的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

再看第二问。

第二问求$P(X+Y\leqslant 1)$。很显然，要使得$X+Y\leqslant 1$，或者是$X=0$且$Y=0$，或者是$X=0$且$Y=1$，或者是$X=1$且$Y=0$，而$X=0$且$Y=0$的概率是$\frac{2}{9}$，$X=0$且$Y=1$的概率是$\frac{1}{9}$，$X=1$且$Y=0$的概率是$\frac{1}{9}$，所以

$P(X+Y\leqslant 1)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$

2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题及精解

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

（1）当 $x\to 0$ 时，用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是(　　)。

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$

(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

解：要想做对本题，大家需要知道三个结论。

第一个结论是：$o(x^m)+o(x^n)=o(x^{m\text{和}n\text{当中小的那个数}})$。

第二个结论是：$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$。

第三个结论是：$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$。

知道了以上三个结论后，我们正式来看本题。

先看(A)选项。

(A)选项是 $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$，根据上述第三个结论可知(A)选项是正确的。

再看(B)选项。

(B)选项是 $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$，根据上述第二个结论可知(B)选项是正确的。

再看(C)选项。

(C)选项是 $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$，根据上述第一个结论可知(C)选项是正确的。

最后看(D)选项。

(D)选项是 $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$，根据上述第一个结论可知 $o(x)+o(x^2)$ 应该等于 $o(x)$ 而不是 $o(x^2)$，所以(D)选项是错误的。

综上所述，本题应该选择(D)选项。

(2) 求函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为(　　)。

(A)0

(B)1

(C)2

(D)3

解：本题求的是函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数。现在将函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 换一种写法，写为分段函数的形式，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-\infty,-1)\\ \dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-1,0)\\ \dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(0,1)\\ \dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(1,+\infty)\end{cases}$$

注意：函数 $f(x)$ 在点 $x=-1$、$x=0$、$x=1$ 处是没有定义的。

可以明显看出，函数 $f(x)$ 一共有三个间断点，分别是 $x=-1,x=0,x=1$。那么，本题的答案就是选择(D)吗?当然不是。因为本题问的并不是函数 $f(x)$ 的间断点的个数，而是函数 $f(x)$ 的可去间断点的个数。

所以我们现在要判断一下 $x=-1,x=0$，$x=1$ 这三个点中到底哪个是可去间断点。

在正式开始判断之前，先来复习一下可去间断点的定义。可去间断点指的是：左右极限均存在且相等，但是不连续。

先来判断一下 $x=-1$ 这个点是不是可去间断点，这需要计算一下极限值 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$ 和极限值 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$。

先来计算极限值 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$。

由于函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-\infty,-1)\\ \dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-1,0)\\ \dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(0,1)\\ \dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(1,+\infty)\end{cases}$，所以当 x 从左侧趋于 -1 的时候，

函数 $f(x)$ 应该被显化为 $\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)}$，所以有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^-}f(x)&=\lim_{x\to-1^-}\frac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1}\lim_{x\to-1^-}\frac{(-x)^x-1}{x\ln(-x)}\\&=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1}\lim_{x\to-1^-}\frac{e^{x\ln(-x)}-1}{x\ln(-x)}\overset{令y=x\ln(-x)}{=}\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1}\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}\\&=\infty\times1=\infty\end{aligned}$$

计算出了 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\infty$，我们还需要再计算 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ 吗?当然就不用了，因为我们此时就可以判断出 $x=-1$ 这个点一定不是 $f(x)$ 的可去间断点,因为可去间断点必须满足左右极限存在且相等，而现在左极限根本就不存在。

综上所述，$x=-1$ 不是可去间断点。

再来判断 $x=0$ 这个点是不是可去间断点，这需要计算极限值 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 和极限值 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$。

先来计算极限值 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$。

由于函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-\infty,-1)\\\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-1,0)\\\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(0,1)\\\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(1,+\infty)\end{cases}$，当 x 从左侧趋于 0 的时候，函数 $f(x)$ 应该被显化为 $\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)}$，所以有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}f(x)&=\lim_{x\to0^-}\frac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x+1}\lim_{x\to0^-}\frac{(-x)^x-1}{x\ln(-x)}\\&=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x+1}\lim_{x\to0^-}\frac{e^{x\ln(-x)}-1}{x\ln(-x)}\overset{令y=x\ln(-x)}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x+1}\lim_{y\to0^+}\frac{e^y-1}{y}\\&=1\times1=1\end{aligned}$$

再来计算极限值 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$。

由于函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-\infty,-1)\\\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-1,0)\\\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(0,1)\\\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(1,+\infty)\end{cases}$，当 x 从右侧趋于 0 的时候，函数

$f(x)$ 应该被显化为$\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}$，所以有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(x)&=\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x+1}\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{x\ln x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x+1}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\overset{令y=x\ln x}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x+1}\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}\\&=1\times1=1\end{aligned}$$

现在已经计算出了$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$和$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，由于$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，所以$x=0$是函数$f(x)$的可去间断点。

综上所述，$x=0$是可去间断点。

最后来判断一下$x=1$是不是可去间断点，这需要计算一下极限值$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$和极限值$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$。

先来计算极限值$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$。

由于函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-\infty,-1)\\\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-1,0)\\\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(0,1)\\\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(1,+\infty)\end{cases}$，当$x$从左侧趋于1的时候，函数$f(x)$应该被显化为$\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}$，所以有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\lim_{x\to1^-}\frac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x+1}\lim_{x\to1^-}\frac{x^x-1}{x\ln x}\\&=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x+1}\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\overset{令y=x\ln x}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x+1}\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}\\&=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

再来计算极限值$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$。

由于函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-\infty,-1)\\\dfrac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)},(-1,0)\\\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(0,1)\\\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x},(1,+\infty)\end{cases}$，当$x$从右侧趋于1的时候，函数

$f(x)$ 应该被显化为$\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}$，所以有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}f(x) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^x-1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}\lim_{x\to 1^+}\frac{x^x-1}{x\ln x}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} \overset{令y=x\ln x}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}\lim_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y}\\ &= \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

现在已经计算出了$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ 和$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，由于$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\dfrac{1}{2}$，所以$x=1$这个点是函数$f(x)$的可去间断点。

综上所述，$x=1$是可去间断点。

经判断，$x=-1$不是可去间断点，$x=0$和$x=1$是可去间断点，所以函数$f(x)$一共有两个可去间断点，本题应该选择(C) 选项。

(3) 设D_k是圆域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$位于第$k$象限的部分，记$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(k=1,2,3,4)$，则(　　)。

(A) $I_1>0$

(B) $I_2>0$

(C) $I_3>0$

(D) $I_4>0$

解： 由于$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(k=1,2,3,4)$，所以有

$$I_1=\iint\limits_{D_1}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_2=\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_3=\iint\limits_{D_3}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_4=\iint\limits_{D_4}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

本题问I_1、I_2、I_3、I_4这四个二重积分中的哪一个大于0。这其实非常简单。大家记住：如果一个二重积分的被积函数在积分区域中的每一点都是大于0的，那么该二重积分就一定大于0。

我们来看一下（B）选项。

(B) 选项中所给的二重积分的被积函数是 $y-x$，积分区域 D_2 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$ 在第二象限中的部分，也就是一个“四分之一圆”。在这个“四分之一圆”的每一点上，是否都有 $y-x>0$? 很明显是，因为第二象限的这“四分之一圆”中的每一点肯定都是 $x<0$ 且 $y>0$，所以必然会有 $y-x>0$。

综上所述，由于 (B) 选项中所给的二重积分 I_2 的被积函数在其积分区域 D_2 中的每一点都是大于0的，所以二重积分 $I_2=\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$，所以本题应该选择 (B) 选项。

(4) 设$\{a_n\}$为正项数列，下列选项正确的是(　　)。

(A) 若 $a_n>a_{n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n>a_{n+1}$

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pa_n$ 存在

(D) 若存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pa_n$ 存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

解：解答之前，我先告诉大家一件事：既然数列$\{a_n\}$为正项数列，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必然是一个正项级数。

下面依次来看(A)、(B)、(C)、(D) 四个选项。

先来判断一下(A) 选项“若 $a_n>a_{n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛”的正误。

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 很明显是一个交错级数。交错级数的收敛分为两种：绝对收敛或者条件收敛。

通过(A) 选项所给的 $a_n>a_{n+1}$ 能判断出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 绝对收敛(也就是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛) 吗?明显不能，因为 $a_n>a_{n+1}$ 和正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛没有任何关系。

通过(A) 选项所给的 $a_n>a_{n+1}$ 能判断出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 条件收敛吗?明显也不能，因为交错级数的莱布尼兹判别法需要同时满足 $a_n>a_{n+1}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 这两个条件，而现在只有一个条件。

综上所述，本题不能选择(A) 选项。

再来判断(B) 选项“若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n > a_{n+1}$”的正误。

(B) 选项说交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，这有可能是绝对收敛，也有可能是条件收敛。假设它是绝对收敛，说明它所对应的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的，而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛与 $a_n > a_{n+1}$ 没有任何关系，所以推不出 $a_n > a_{n+1}$，本题不能选择(B) 选项。

再来判断(C) 选项“若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $p > 1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在”的正误。

(C) 选项说正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛。也就是说，已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 都收敛。但是“$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 都收敛”与“两者比值的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 是否存在”毫无关系，所以本题不能选择(C) 选项。

最后来判断(D) 选项“若存在常数 $p > 1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛”的正误。

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛。(D) 选项说极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在。正项级数的比较判断法如下：

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$。

情况 ①：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 0$，那么，若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

情况 ②：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$，那么，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛。

情况 ③：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} =$ 一个大于 0 的常数，那么，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的敛散性相同。

以上就是正项级数的比较判别法，(D) 选项说 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在，那么就是情况④或者是情况③。

如果是情况①，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；如果是情况③，由于于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。所以本题应该选择(D) 选项。

(5) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则(　　)。

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

解：由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，所以设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$。把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以列分块，即 $\boldsymbol{A}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_n)$。同样，把矩阵 $\boldsymbol{C}$ 也以列分块，即 $\boldsymbol{C}=(\vec{\boldsymbol{\gamma}}_1,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_n)$。

由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，又因为 $\boldsymbol{A}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_n)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=(\vec{\boldsymbol{\gamma}}_1,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_n)$，所以有

$$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=(\vec{\boldsymbol{\gamma}}_1,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_n)$$

上式可以展开为

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\gamma}}_1=b_{11}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+b_{21}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+b_{n1}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_n \\ \vec{\boldsymbol{\gamma}}_2=b_{12}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+b_{22}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+b_{n2}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_n \\ \vdots \\ \vec{\boldsymbol{\gamma}}_n=b_{1n}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+b_{2n}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+b_{nn}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_n \end{cases}$$

所以说矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可以由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示。

已知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，说明矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在。将 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 的等式左右两侧同时右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{ABB}^{-1}=\boldsymbol{CB}^{-1}$$

化简得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$$

即

$$\boldsymbol{CB}^{-1}=\boldsymbol{A}$$

刚才我们根据已知条件“$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$”推出了“矩阵$\boldsymbol{C}$的列向量组可以由矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组线性表示”。大家看 $\boldsymbol{CB}^{-1}=\boldsymbol{A}$ 中的 $\boldsymbol{A}$ 不就相当于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 中的 $\boldsymbol{C}$ 吗？$\boldsymbol{CB}^{-1}=\boldsymbol{A}$ 中的 $\boldsymbol{C}$ 不就相当于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 中的 $\boldsymbol{A}$ 吗？

既然能从已知条件“$AB=C$”推出“矩阵 C 的列向量组可以由矩阵 A 的列向量组线性表示”，同理，也能从“$CB^{-1}=A$”推出“矩阵 A 的列向量组可以由矩阵 C 的列向量组线性表示”。

这两项结合，可得：矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价。

所以本题应该选择(B)选项。

（6）矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为(　　)。

(A)$a=0,b=2$

(B)$a=0,b$ 为任意常数

(C)$a=2,b=0$

(D)$a=2,b$ 为任意常数

解： 由于$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$，所以矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$是实对称矩阵。由于$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以矩阵$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$也是实对称矩阵。

我们知道，两个实对称矩阵相似的充分必要条件是：这两个矩阵具有相同的特征值。

先看矩阵$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$的特征值。

由于矩阵$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$是对角矩阵，所以该矩阵对角线上的数字就是它的特征值，三个特征值是 2、b、0。

于是本题中“矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件”现在就被转化为“$2$、$b$、

0 是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值的充分必要条件”。

通过计算可知，矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$所对应的行列式$\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}$的值为 0，这说明 0 是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值(无论 a、b 取什么)。

我们知道，一个矩阵的对角线上的数字之和等于所有特征值之和，而矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的对角线上的数字是1、$b$、1，所以该矩阵的所有特征值(三个特征值)之和为 $1+b+1=2+b$。

由此可知,若 2 是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值，则 b 必是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值。

于是,本题的题干“矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件”又进一步被转化为“2 是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值的充分必要条件”。

由于 2 是矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$的特征值，所以有

$$\left|2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}\right|=0$$

化简得

$$-4a^2=0$$

解得 $a=0$。

所以矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为 $a=0$，b 为任意常数，本题应

该选择(B)选项。

(7) 设 X_1,X_2,X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0,2^2)$，$X_3 \sim N(5,3^2)$，$p_i = P\{-2 \leqslant X_i \leqslant 2\}(i=1,2,3)$，则(　　)。

(A) $p_1 > p_2 > p_3$

(B) $p_2 > p_1 > p_3$

(C) $p_3 > p_1 > p_2$

(D) $p_1 > p_3 > p_2$

解：由于 $p_i = P\{-2 \leqslant X_i \leqslant 2\}(i=1,2,3)$，所以有

$p_1 = P\{-2 \leqslant X_1 \leqslant 2\}$

$p_2 = P\{-2 \leqslant X_2 \leqslant 2\}$

$p_3 = P\{-2 \leqslant X_3 \leqslant 2\}$

把 p_1、p_2、p_3 稍微变化一下，方法如下：

$$\begin{aligned} p_1 &= P\{-2 \leqslant X_1 \leqslant 2\} \\ &= P\left\{\frac{-2-0}{1} \leqslant \frac{X_1-0}{1} \leqslant \frac{2-0}{1}\right\} \\ &= P\{-2 \leqslant X_1 \leqslant 2\}(\text{和没变之前一样}) \end{aligned}$$

令 $A = X_1$，则 $p_1 = P\{-2 \leqslant A \leqslant 2\}$。

$$\begin{aligned} p_2 &= P\{-2 \leqslant X_2 \leqslant 2\} \\ &= P\left\{\frac{-2-0}{2} \leqslant \frac{X_2-0}{2} \leqslant \frac{2-0}{2}\right\} \\ &= P\left\{-1 \leqslant \frac{X_2}{2} \leqslant 1\right\} \end{aligned}$$

令 $B = \dfrac{X_2}{2}$，则 $p_2 = P\{-1 \leqslant B \leqslant 1\}$。

$$\begin{aligned} p_3 &= P\{-2 \leqslant X_3 \leqslant 2\} \\ &= P\left\{\frac{-2-5}{3} \leqslant \frac{X_3-5}{3} \leqslant \frac{2-5}{3}\right\} \\ &= P\left\{-\frac{7}{3} \leqslant \frac{X_3-5}{3} \leqslant -1\right\} \end{aligned}$$

令 $C = \dfrac{X_3-5}{3}$，则 $p_3 = P\left\{-\dfrac{7}{3} \leqslant C \leqslant -1\right\}$。

相信同学们都知道这么变换是正确的，但是可能不知道为什么要进行这样的变换。下

面就来解释一下。

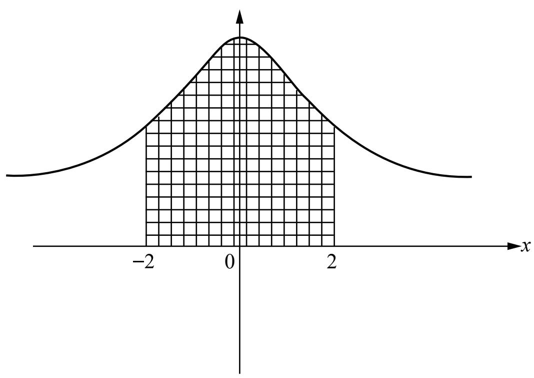
先来复习一个定理：

若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$。

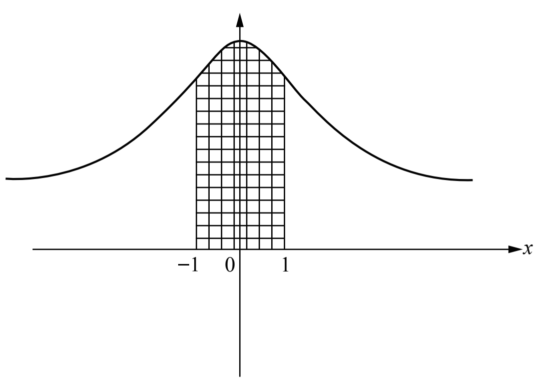
而 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0,2^2)$，$X_3 \sim N(5,3^2)$，根据上述定理有：$\dfrac{X_1-0}{1} \sim N(0,1)$，$\dfrac{X_2-0}{2} \sim N(0,1)$，$\dfrac{X_3-5}{3} \sim N(0,1)$，即 $A \sim N(0,1)$，$B \sim N(0,1)$，$C \sim N(0,1)$。现在大家应该明白为什么要做前面的变换了吧。

下面采用画图法来解答。

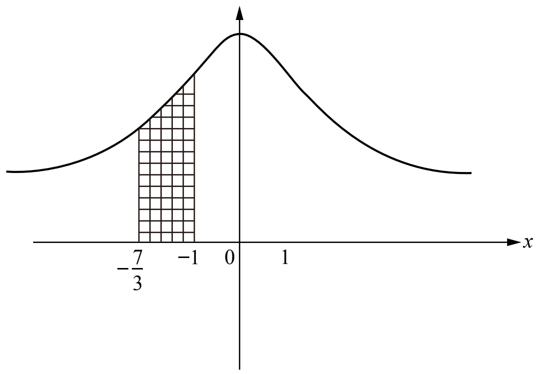
由于 $p_1 = P\{-2 \leqslant A \leqslant 2\}$ 且 $A \sim N(0,1)$，所以下图中的阴影区域的面积就代表 p_1。



由于 $p_2 = P\{-1 \leqslant B \leqslant 1\}$ 且 $B \sim N(0,1)$，所以下图中的阴影区域的面积就代表 p_2。



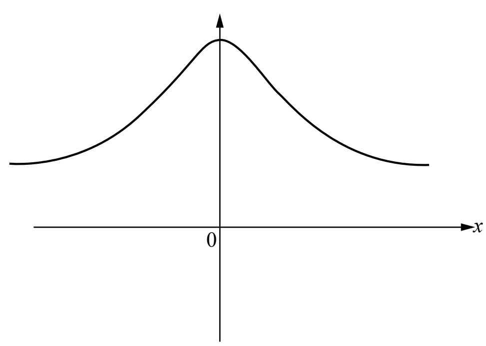
由于 $p_3 = P\left\{-\dfrac{7}{3} \leqslant C \leqslant -1\right\}$ 且 $C \sim N(0,1)$，所以下图中的阴影区域的面积就代表 p_3。



由面积的大小就可以很容易地判断出 $p_1 > p_2 > p_3$，所以本题应该选择（A）选项。

本题评注：

大家一定要注意一点：由于 A、B、C 都是服从正态分布 $N(0,1)$，所以以上三个图中的正态曲线是完全一样的。也就是说它们的高度、开口大小、下降幅度都是一模一样的。



（8）设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	−1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\}=$（　　）。

（A）$\frac{1}{12}$　　（B）$\frac{1}{8}$

（C）$\frac{1}{6}$　　（D）$\frac{1}{2}$

解：本题的问题是 $X+Y=2$ 的概率。由于 X 的可能取值有四个(分别是0、1、2、3)，Y 的可能取值有三个(分别是 -1、0、1)，所以 $X+Y=2$ 或者是“$X=1$ 且 $Y=1$”，或者是“$X=2$ 且 $Y=0$”，或者是“$X=3$ 且 $Y=-1$”。也就是说，有如下等式成立：

$$P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=-1\} \tag{1}$$

已知随机变量 X 和 Y 相互独立，这也就意味着：

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}\times P\{Y=1\} \tag{2}$$

$$P\{X=2,Y=0\}=P\{X=2\}\times P\{Y=0\} \tag{3}$$

$$P\{X=3,Y=-1\}=P\{X=3\}\times P\{Y=-1\} \tag{4}$$

把(2)式、(3)式、(4)式代入(1)式，得

$$P\{X+Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}+P\{X=2\}P\{Y=0\}+P\{X=3\}P\{Y=-1\} \tag{5}$$

由于随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以

$$P\{X=1\}=\frac{1}{4},P\{X=2\}=\frac{1}{8},P\{X=3\}=\frac{1}{8}$$

由于随机变量 Y 的分布律为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

所以

$$P\{Y=1\}=\frac{1}{3},P\{Y=0\}=\frac{1}{3},P\{Y=-1\}=\frac{1}{3}$$

现在我们把 $P\{X=1\}=\frac{1}{4},P\{X=2\}=\frac{1}{8},P\{X=3\}=\frac{1}{8}$，$P\{Y=1\}=\frac{1}{3},P\{Y=0\}=\frac{1}{3},P\{Y=-1\}=\frac{1}{3}$ 代入(5)式中，得

$$P\{X+Y=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \tag{6}$$

所以本题应该选择(C)选项。

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

（9）设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2}) =$ ________。

解：首先要明确的是，本题要求计算的是“数列的极限”。

我要告诉大家，当遇到计算数列的极限的题的时候，就肯定是用以下四种方法之一来求解：单调有界法、夹逼定理法、积分和式法、将数列极限转化为函数极限。

下面具体讲一下到底什么时候用什么方法。

“单调有界法”用于计算已知数列的递推公式的数列极限计算题。

“夹逼定理法”用于计算含 $\sum$ 的数列极限计算题。

“积分和式法”用于计算含 $\sum$ 或 $\prod$ 的数列极限计算题。

如果某道数列的极限计算题既不满足“单调有界法”、“夹逼定理法”的使用条件，也不满足“积分和式法”的使用条件，就用“将数列极限转化为函数极限”来计算。

对于本题而言，由于既没有给数列的递推公式，$n[f(\frac{1}{n}) - 1]$ 中也不含 $\sum$ 或 $\prod$，所以应该采用“将数列极限转化为函数极限”来计算本题。具体计算方法如下。

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2}) = \lim_{x\to+\infty} xf(\frac{x}{x+2}) \tag{1}$$

（1）式中，我们把 n 换成了 x。有些同学可能会问：为什么 n 趋于 ∞，将 n 变为 x 之后变成 x 趋于 $+\infty$ 了呢？我来解释一下：大家记住，$n\to\infty$ 指的其实就是 $n\to+\infty$（因为 n 不可能趋于 $-\infty$），所以 $n\to+\infty$ 可以省略写为 $n\to\infty$。但是 x 就不同了，x 既可以趋于 $+\infty$ 又可以趋于 $-\infty$，所以将数列极限转化为函数极限之后，“+”就不能省略了。

$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(\frac{x}{x+2})$ 可以变为

$$\lim_{x\to+\infty} xf(\frac{x}{x+2}) = \lim_{x\to+\infty} xf(1 - \frac{2}{x+2}) \tag{2}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2}) = \lim_{x\to+\infty} xf(1 - \frac{2}{x+2}) \tag{3}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(1 - \frac{2}{x+2})$ 可以写为

$$\lim_{x\to+\infty} xf(1 - \frac{2}{x+2}) = \lim_{x\to+\infty} [-\frac{2x}{x+2} \times \frac{f(1 - \frac{2}{x+2})}{-\frac{2}{x+2}}] \tag{4}$$

(3) 式、(4) 式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2x}{x+2}\times\frac{f\left(1-\frac{2}{x+2}\right)}{-\frac{2}{x+2}}\right]\tag{5}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{2x}{x+2}\times\frac{f\left(1-\frac{2}{x+2}\right)}{-\frac{2}{x+2}}\right]$ 可以拆为

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2x}{x+2}\times\frac{f\left(1-\frac{2}{x+2}\right)}{-\frac{2}{x+2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x}{x+2}\right)\times\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{x+2}\right)}{-\frac{2}{x+2}}\tag{6}$$

(5) 式、(6) 式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x}{x+2}\right)\times\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{x+2}\right)}{-\frac{2}{x+2}}\tag{7}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x}{x+2}\right)=-2$，所以(7) 式可以改写为

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{x+2}\right)}{-\frac{2}{x+2}}\tag{8}$$

已知曲线 $y=f(x)$ 经过点$(1,0)$，由此可以知道$f(1)=0$，所以(8) 式可以改写为

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{x+2}\right)-f(1)}{-\frac{2}{x+2}}\tag{9}$$

(9) 式可以写为

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{x+2}\right)-f(1+0)}{-\frac{2}{x+2}-0}\tag{10}$$

已知曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点$(1,0)$ 处有公共切线，由此可以知道 $f'(1)=(2x-1)\big|_{x=1}=1$。也就是说，函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且导数值为 1。

下面告诉大家一个定理：

已知函数$f(x)$ 在$x=a$处可导，且 $\lim\limits_{x\to\text{某数}}\square=0$，$\lim\limits_{x\to\text{某数}}\Delta=0$ 则 $\lim\limits_{x\to\text{某数}}\frac{f(a+\square)-f(a+\Delta)}{\square-\Delta}$

$= f'(a)$。

(10) 式的等式右侧是 $-2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(1-\frac{2}{x+2})-f(1+0)}{-\frac{2}{x+2}-0}$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2}{x+2}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$，又因为已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，根据前面介绍的定理可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1-\frac{2}{x+2})-f(1+0)}{-\frac{2}{x+2}-0}=f'(1) \tag{11}$$

将(11) 式代入(10) 式中，得

$$\lim_{n\to\infty}nf(\frac{n}{n+2})=-2f'(1) \tag{12}$$

由于刚才已经计算出 $f'(1)=1$，所以把 $f'(1)=1$ 代入到(12) 式中，得

$$\lim_{n\to\infty}nf(\frac{n}{n+2})=-2 \tag{13}$$

所以本题应填 -2。

(10) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________。

解：本题求的是 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$。需要分两步走：第一步是求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，第二步才是求出 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$。

先来进行第一步，求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

首先将方程 $(z+y)^x=xy$ 变换一种写法，就是将方程 $(z+y)^x=xy$ 的等式两侧同时取“ln”。这样一来，$(z+y)^x=xy$ 就被改写为 $x\ln(z+y)=\ln(xy)$。

将方程 $x\ln(z+y)=\ln(xy)$ 的等式左右两侧同时对 x 求偏导。

等式左侧的 $x\ln(z+y)$ 对 x 求偏导后为 $\ln(z+y)+\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}x}{z+y}$，等式右侧的 $\ln(xy)$ 对 x 求偏导后为 $\dfrac{1}{x}$。

即 $\ln(z+y)+\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}x}{z+y}=\dfrac{1}{x}$。

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z+y}{x}\times[\dfrac{1}{x}-\ln(z+y)]$。

再来进行第二步，求出最终的 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$。

先把 $x=1$ 且 $y=2$ 代入方程 $(z+y)^x=xy$ 中，解得 $z=0$。再把 $x=1,y=2,z=0$ 代入到第一步求得的 $\frac{z+y}{x}\times\left[\frac{1}{x}-\ln(z+y)\right]$ 中，解得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\frac{0+2}{1}\times\left[\frac{1}{1}-\ln(0+2)\right]=2\times[1-\ln2]=2-2\ln2$$

所以本题应填 $2-2\ln2$。

(11) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$ ________。

解：本题明显属于反常积分的计算题(因为积分上限是 $+\infty$)，所以应该按照反常积分的计算方法来计算。

这里为大家总结一下反常积分的计算方法。

反常积分可以分为三类。

第一类反常积分：如果反常积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 在积分上限处没有定义或者在积分下限处没有定义(注意，我用的词是“或者”，也就是上限和下限“二选一”)，并且在开区间(上限，下限)内的任意一点都有定义，就称这样的反常积分为第一类反常积分。

第一类反常积分的计算方法：按照定积分的方法做，但最终上、下限中有一个值是无法直接代入的，只能算极限[如果是下限代入不了，就算下限的右极限(除非是无穷，那就不用分左右)；如果是上限代入不了,就算上限的左极限(除非是无穷，那就不用分左右)]。

第二类反常积分：如果反常积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 在积分上限处没有定义并且在积分下限处没有定义(注意，我用的词是“并且”，也就是上限和下限都没有定义)，并且在开区间(上限，下限)内的任意一点都有定义，就称这样的反常积分为第二类反常积分。

第二类反常积分的计算方法：按照如下两种方法之一就肯定能解出来(还有可能用两种方法都能解出来)。

[方法1] 和第一类反常积分的计算方法一样,按照定积分的方法做就可以了，但最终上下限都无法直接代入，只能两个算极限[注意：算下限的极限时是算下限的右极限(除非是无穷，那就不用分左右)；算上限的极限时是算上限的左极限(除非是无穷，那就不用分左右)]。

[方法2] 利用公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$，将一个积分拆解成两个积分。这样，每个积分都是第一类反常积分了。

第三类反常积分：如果反常积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 在开区间 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2+2t}\times\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^1 (1+t)^{-2}\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^1 (1+t)^{-2}\mathrm{d}(t+1)$$

$$=2\times\left(\frac{(1+t)^{-1}}{-1}\right)\Big|_0^1$$

$$=2\times\left(-\frac{1}{1+t}\right)\Big|_0^1$$

$$=2\times\left[-\frac{1}{1+1}-\left(-\frac{1}{1+0}\right)\right]$$

$$=2\times\frac{1}{2}$$

$=1$ 内的一点没有定义，就称这样的反常积分为第三类反常积分。

第三类反常积分的计算方法：利用公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$，将一个积分拆解成两个积分。这样，每个积分就都是第一类或第二类反常积分了。但是注意，这里的 c 不能随便找，要找没有定义的点。

以上给大家复习了反常积分的分类以及各自对应的解题方法。对于本题而言，计算的反常积分是$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$，明显是第一类反常积分，因为函数 $y=\frac{\ln x}{(1+x)^2}$ 在积分上限 $+\infty$ 处没有定义(任何函数在无穷大处都是没有定义的)并且函数 $y=\frac{\ln x}{(1+x)^2}$ 在开区间$(1,+\infty)$内的任意一点都有定义。所以应该按照第一类反常积分的计算方法来进行计算。

下面是具体的计算过程。

$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ 可以变为

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{1+x}\right)\tag{1}$$

把$\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{1+x}\right)$ 中的“d”后面的负号提到最前面，得

$$\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}\left(-\frac{1}{1+x}\right)=-\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right) \tag{2}$$

(1) 式、(2) 式相结合，得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right) \tag{3}$$

由分部积分公式可得

$$-\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{\ln x}{1+x}\Bigg|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x \tag{4}$$

(3) 式、(4) 式相结合，得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{1+x}\Bigg|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x \tag{5}$$

通过计算可知

$$-\frac{\ln x}{1+x}\Bigg|_1^{+\infty}=0 \tag{6}$$

将(6) 式代入(5) 式，得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x \tag{7}$$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x$ 可以变形为

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\mathrm{d}x \tag{8}$$

(7) 式、(8) 式相结合，得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\mathrm{d}x \tag{9}$$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\mathrm{d}x$ 可以变为

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left[-\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] \tag{10}$$

(9) 式、(10) 式相结合，得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left[-\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] \tag{11}$$

把$\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left[-\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ 中的“d” 后面的负号提到最前面，得

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left[-\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=-\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x}\right) \tag{12}$$

(11) 式、(12) 式相结合，得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x}\right) \tag{13}$$

对 $-\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 直接使用积分公式 $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$ 得

$$-\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x}\right)=-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty} \tag{14}$$

注意：(14) 式中之所以用的是括号而不是绝对值，是因为 x 是在区间 $(1,+\infty)$ 内取值，所以 $1+\frac{1}{x}$ 肯定大于 0，用绝对值和括号是一样的。

(13) 式、(14) 式相结合，得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty} \tag{15}$$

现在来计算一下 $-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty}$。

$$\begin{aligned}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty}&=\lim_{x\to+\infty}\left[-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]-\left(-\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)\right)\\&=0-(-\ln 2)\\&=\ln 2\end{aligned}$$

把 $-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$ 代入(15) 式，得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\ln 2 \tag{16}$$

所以本题应填 ln2。

(12) 微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$ ________。

解：本题是求微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解，该微分方程明显是一个二阶常系数齐次线性微分方程。

先来给大家复习一下求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法。

设 $Ay''+By'+Cy=0$ 是一个二阶常系数齐次线性微分方程，则

第一步：先把 y'' 的系数变为1，即变为 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$，记 $p=\frac{B}{A}$，$q=\frac{C}{A}$。

第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

第三步：写出通解。具体来说就是

情况1. 若第二步解出的 r_1、r_2 为实根并且 $r_1\neq r_2$，则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$。

情况2. 若第二步解出的 r_1、r_2 为实根并且 $r_1=r_2$，则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$。

情况3. 若第二步解出的 r_1、r_2 为复数根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，则通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$。

了解了求解二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法，下面就来求方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解。

第一步：把 y'' 的系数变为1，即变为 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$，记 $p=\frac{B}{A}$，$q=\frac{C}{A}$。

对于 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$，已经是 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$ 的形式了，所以不用再变了。其中 $p=-1$，$q=\frac{1}{4}$。

第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

对于 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$，相应的特征方程是 $r^2-r+\frac{1}{4}=0$

解得 $r_1=\frac{1}{2}$，$r_2=\frac{1}{2}$。

第三步：写出通解。

情况1. 若第二步解出的 r_1、r_2 为实根并且 $r_1\neq r_2$，则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$。

情况2. 若第二步解出的 r_1、r_2 为实根并且 $r_1=r_2$，则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$。

情况3. 若第二步解出的 r_1、r_2 为复数根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，则通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$。

由于 $r_1=\frac{1}{2}$，$r_2=\frac{1}{2}$，属于情况2，所以 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $f(x)=(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$。

本题应填 $f(x)=(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$。

(13) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是3阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ________。

解： 已知 $a_{ij}+A_{ij}=0$，移项得 $a_{ij}=-A_{ij}$，这意味着什么呢？我们先写出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩

阵 $\boldsymbol{A}^*$。

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，所以

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}，矩阵 \boldsymbol{A} 的伴随矩阵 \boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}。$$

可见，a_{ij} 指的是矩阵 A 中的元素，A_{ij} 指的是矩阵 A^* 中的元素，所以由 $a_{ij}=-A_{ij}$ 可以得出

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^* \tag{1}$$

将(1) 式的等式左右两侧取行列式，得

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}^*| \tag{2}$$

而我们都知道

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}| \tag{3}$$

(2) 式、(3) 式相结合，得

$$|\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}^*| \tag{4}$$

现在我给大家复习一个公式 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$，其中 n 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数(或列数)。根据此公式有

$$|-\boldsymbol{A}^*|=(-1)^3|\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}^*| \tag{5}$$

(4) 式、(5) 式相结合，得

$$|A|=-|A^*| \tag{6}$$

再来复习一个公式：$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，其中 n 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数(或列数)。根据此公式，(6) 式可以变为

$$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|^2 \tag{7}$$

我们都知道，行列式本质是一个数，可以设为 x，所以(7) 式就变为

$$x=-x^2 \tag{8}$$

解得 $x=0$ 或 $x=-1$，即 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$。可是我们知道，行列式的值肯定是唯一的，所以需要舍去一个，那么该舍去哪一个呢?

我们知道

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \tag{9}$$

而由(1) 式可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^*$，所以有

$$r(\boldsymbol{A})=r(-\boldsymbol{A}^*) \tag{10}$$

而我们都知道

$$r(-\boldsymbol{A}^*)=r(\boldsymbol{A}^*) \tag{11}$$

(10) 式、(11) 式相结合，得

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^*) \tag{12}$$

下面给大家讲一个定理:

对于 n 阶方阵而言，有

$$r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} 0, r(\boldsymbol{A}) < n-1 \\ 1, r(\boldsymbol{A}) = n-1 \\ n, r(\boldsymbol{A}) = n \end{cases}$$

而本题中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，而且 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^*)$，那么由上述定理我们可知:

$r(\boldsymbol{A}) = 0$ 或 $r(\boldsymbol{A}) = 3$

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵，所以 $r(\boldsymbol{A}) \neq 0$，$r(\boldsymbol{A}) = 3$，也就是说方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩。这也推出该方阵的行列式不等于 0，所以 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$。

前面已经推出 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 或 $|\boldsymbol{A}| = -1$，所以 $|A| = -1$。

所以本题应填 -1。

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $E(Xe^{2X}) =$ ________。

解：已知随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，可知随机变量 X 的概率密度函数为

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty < x < +\infty$

所以

$$E(Xe^{2X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \tag{1}$$

而$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ 可以整理为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)}dx \tag{2}$$

(1) 式、(2) 式相结合，得

$$E(Xe^{2X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)}dx \tag{3}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)}dx$ 可以整理为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)}dx = e^2\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}dx \tag{4}$$

(3) 式、(4) 式相结合，得

$$E(Xe^{2X}) = e^2\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}dx \tag{5}$$

令 $x-2=t$，则 $e^2\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}\mathrm{d}x$ 变为

$$\mathrm{e}^2\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t+2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \tag{6}$$

(5) 式、(6) 式相结合，得

$$E(X\mathrm{e}^{2X})=\mathrm{e}^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t+2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \tag{7}$$

而 $\mathrm{e}^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t+2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ 可以写为

$$\mathrm{e}^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t+2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right] \tag{8}$$

(7) 式、(8) 式相结合，得

$$E(X\mathrm{e}^{2X})=\mathrm{e}^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right] \tag{9}$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=0$（服从标准正态分布的随机变量的数学期望为 0），$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1$（这是概率密度函数的性质，从负无穷到正无穷的积分值为 1）。将 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1$ 代入到 (9) 式中，得

$$E(X\mathrm{e}^{2X})=\mathrm{e}^2(0+2)=2\mathrm{e}^2 \tag{10}$$

所以本题应填 $2\mathrm{e}^2$。

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值。

解：先计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$。

由于 $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x)=0$，$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$ 属于“$\frac{0}{0}$ 型”的函数极限计算，可以对其使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x)'}{(x^2)'} \tag{1}$$

通过计算可知

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos 2x\cos 3x+2\sin 2x\cos 3x\cos x+3\sin 3x\cos 2x\cos x}{2x}\tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos 2x\cos 3x+2\sin 2x\cos 3x\cos x+3\sin 3x\cos 2x\cos x}{2x}\tag{3}$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cos 2x\cos 3x+2\sin 2x\cos 3x\cos x+3\sin 3x\cos 2x\cos x}{2x}$ 很明显可以写为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cos 2x\cos 3x}{2x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin 2x\cos 3x\cos x}{2x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin 3x\cos 2x\cos x}{2x}$。计算可知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cos 2x\cos 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos 2x\cos 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x\cos 3x}{2}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin 2x\cos 3x\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x\cos 3x\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}2\cos 3x\cos x=2$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin 3x\cos 2x\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9x\cos 2x\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9\cos 2x\cos x}{2}=\dfrac{9}{2}$，所以(3)式可以写为

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}=\frac{1}{2}+2+\frac{9}{2}=7\tag{4}$$

在(4)式的等式左右两侧同时乘以$\dfrac{1}{7}$，得

$$\frac{1}{7}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}=1\tag{5}$$

而

$$\frac{1}{7}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{7x^2}\tag{6}$$

(5)式、(6)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{7x^2}=1\tag{7}$$

已知当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，这就说明

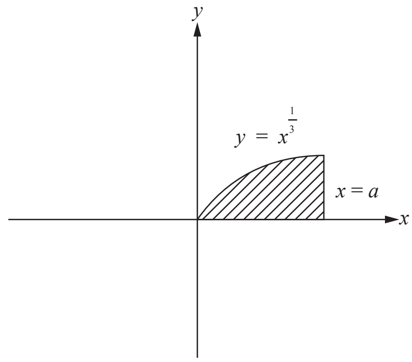
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=1\tag{8}$$

对比(7)式和(8)式，立刻可知 $a=7$，$n=2$。

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$、直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形。V_x、V_y 分别是 D 绕 x 轴、y 轴旋转一周所得旋转体的体积。若 $V_y=10V_x$，求 a 的值。

解：首先在平面直角坐标系中画出由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$、直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，如下图所示。



V_x、V_y 分别是 D 绕 x 轴、y 轴旋转一周所得旋转体的体积，由绕 x 轴、y 轴的旋转体体积公式可得

$$V_x=\int_0^a \pi(x^{\frac{1}{3}})^2\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y=\int_0^a 2\pi x\cdot x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}$$

由于 $V_y=10V_x$，所以有

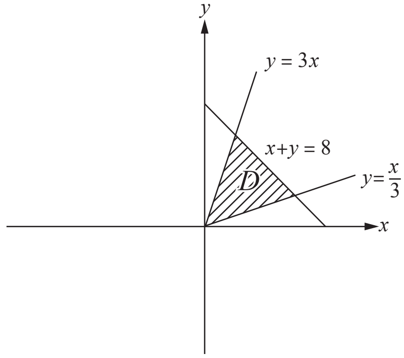
$$\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}=10\times\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

解得 $a=7\sqrt{7}$。

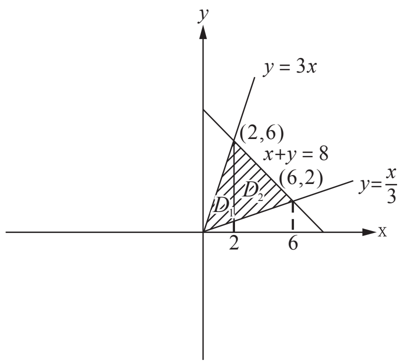
（17）（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由直线 $x=3y$、$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成，计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解：首先在平面直角坐标系中画出由直线 $x=3y$、$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成的平面区域 D，如下图所示：



将积分区域 D 分为 D_1 和 D_2 两个区域，如下图所示(如果不分成两个部分，那么积分上下限就无法确定)：



所以有

$$\iint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

先来计算$\iint_{D_1} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

由于积分区域 D_1 不是圆或半圆或$\frac{1}{4}$圆，所以应该利用直角坐标系法(而不是极坐标系法）来计算本题。

$$\iint_{D_1} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{3x} x^2 \mathrm{d}y = \frac{32}{3}$$

再来计算$\iint_{D_2} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

由于积分区域 D_2 不是圆或半圆或$\frac{1}{4}$圆，所以我们应该利用直角坐标系法(而不是极坐标系法）来计算本题。

$$\iint_{D_2} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^6 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} x^2 \mathrm{d}y = \frac{384}{3}$$

将$\iint_{D_1} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{32}{3}, \iint_{D_2} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{384}{3}$代入(1）式中，得

$$\iint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{32}{3} + \frac{384}{3} = \frac{416}{3} \tag{2}$$

（18）（本题满分 10 分）

设生产某商品的固定成本为 60000 元，可变成本为 20 元／件，价格函数为 $P = 60 - \frac{Q}{1000}$（P 是单价，单位：元；Q 是销量，单位：件）。已知产销平衡，求：

（Ⅰ）该商品的边际利润；

（Ⅱ）当 $P = 50$ 时的边际利润，并解释其经济意义。

（Ⅲ）使得利润最大的定价 P。

解：这种与经济有关的题几乎每年数学三都会考一道，现在告诉大家六句话，大家以后就用这六句话来解这类题。

第一句话：大家一定要知道收益 $R = PQ$；一定要知道利润 $I = PQ - C$（C 为成本）。

第二句话：大家一定要知道$\frac{EQ}{EP} = \frac{P}{Q} \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$或$\frac{EQ}{EP} = -\frac{P}{Q} \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$。具体来说：当需求弹性大于 0 时，取负；当需求弹性小于 0 时，取正。

第三句话：大家一定要知道收益对价格的弹性公式$\frac{ER}{EP} = \frac{P}{R} \times \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$，一定要知道收益对需求的弹性公式$\frac{ER}{EQ} = \frac{Q}{R} \times \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$。

第四句话：一定要知道$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} = Q + P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$，一定要知道$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = P + Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}$。

第五句话：大家一定要知道当边际收益等于边际成本时，利润最大化。

第六句话：大家一定要知道边际成本的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q}$；一定要知道边际收益的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$；一定要知道边际利润的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}Q}$。再来看本题，先看第（Ⅰ）问。

由于固定成本为 60000 元，可变成本为 20 元／件，所以总的成本为

$$C = 20Q + 60000 \tag{1}$$

由前面“第一句话”可知

$$I = PQ - C \tag{2}$$

把(1)式代入(2)式得

$$I = PQ - (20Q + 60000) \tag{3}$$

把 $P = 60 - \frac{Q}{1000}$，代入(3)式得

$$I = (60 - \frac{Q}{1000})Q - 20Q - 60000 \tag{4}$$

(4)式可以化简为

$$I = 40Q - \frac{Q^2}{1000} - 60000 \tag{5}$$

由“第六句话”可知，边际利润为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}Q} = 40 - \frac{Q}{500} \tag{6}$$

所以边际利润为 $40 - \frac{Q}{500}$。

再来看第(Ⅱ)问。

已知

$$P = 50 \tag{7}$$

而题中说

$$P = 60 - \frac{Q}{1000} \tag{8}$$

把(7)式代入(8)式，得

$$50 = 60 - \frac{Q}{1000} \tag{9}$$

由(9)式可解得 $Q = 10000$，代入到(6)式中得

$$40 - \frac{Q}{500} = 40 - 20 = 20 \tag{10}$$

所以 $P = 50$ 时的边际利润为 20，其经济意义为“当价格 $P = 50$ 时，每销售一件产品可获得 20 元的利润”。

最后来看第(Ⅲ)问。

第(Ⅲ)问说利润最大，由“第五句话”可知，边际成本等于边际收益时，利润最大。下面分别来计算一下边际成本与边际收益。

由于成本为 $C = 20Q + 60000$，所以边际成本为$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q} = 20$；由于收益为 $R = PQ = \left(60 - \frac{Q}{1000}\right)Q$，所以边际收益为$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = 60 - \frac{Q}{500}$。

令$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$，所以有 $20 = 60 - \frac{Q}{500}$，解得 $Q = 20000$。代入到 $P = 60 - \frac{Q}{1000}$ 中，解得 $P = 40$。

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导，$f(0) = 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$。证明：

(Ⅰ)存在 $a > 0$，使得 $f(a) = 1$；

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的 a，存在 $\xi \in (0,a)$，使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$。

解：本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，根据“极限的定义”可知，“$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$”指的是“存在 2 的一个邻域，无论这个邻域有多小（比如从 1.99999 到 2.00001），当 $x>$ 正数 X 时，所有的函数值 $f(x)$ 都在此邻域内”。

由此可知：必然存在一个正数 b，当 $x\geqslant b$ 时，$f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$。

由于 $f(0)=0$，$f(b)\geqslant\dfrac{3}{2}$，所以在区间 $[0,b]$ 上使用介值定理，可知存在 $a\in(0,b)$，使得 $f(a)=1$。即：存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$。

再来看第（Ⅱ）问。

第二问非常简单，只需要在区间 $[0,a]$ 上使用拉格朗日中值定理即可。即

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi)$$

由于 $f(a)=1$，$f(0)=0$，所以 $\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi)$ 可以化简为 $\dfrac{1}{a}=f'(\xi)$。

（20）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$。当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$。

解：本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

第（Ⅰ）问问的是“当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$”。这里先问大家一个问题：矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是几行几列的矩阵？很显然是两行两列的矩阵（因为 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，这就必然说明矩阵 $\boldsymbol{AC}$ 和矩阵 $\boldsymbol{CA}$ 都存在，也就是说矩阵 $\boldsymbol{C}$ 既可以左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可以右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数，并且矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，所以矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是两行两列的矩阵）。

设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，而矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$，根据矩阵乘法法则，就有 $\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}x_1+ax_3&x_2+ax_4\\x_1&x_2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{CA}=\begin{pmatrix}x_1+x_2&ax_1\\x_3+x_4&ax_3\end{pmatrix}$。

而 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，所以有

$$\begin{pmatrix}x_1+ax_3&x_2+ax_4\\x_1&x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1+x_2&ax_1\\x_3+x_4&ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$$

把它整理成方程组的形式，就是：

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$$

这明显是一个非齐次方程组。第(Ⅰ)问的问题“当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$”，可以翻译成“当 a,b 为何值时，非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$ 有解”。

先把非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$ 写为矩阵的形式 $\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}$。

再将矩阵 $\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}$ 化为阶梯型矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b\end{pmatrix}$。

当矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b\end{pmatrix}$ 的秩与矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-a&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的秩相等时，非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$ 有解。矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-a&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的秩很明显是 2，所以矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b\end{pmatrix}$ 的秩也得是 2 才行。因此可得 $a=-1$，$b=0$。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求矩阵 $\boldsymbol{C}$，做第(Ⅰ)问时，已经设矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，所以现在只需解出

x_1、x_2、x_3、x_4 即可。

把第(Ⅰ)问求得的 $a=-1$，$b=0$ 代入非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$ 中，得

$\begin{cases}-x_2-x_3=0\\x_1+x_2-x_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2+x_3=0\end{cases}$。

现在只需解非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2-x_3=0\\x_1+x_2-x_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2+x_3=0\end{cases}$ 就可以求出 x_1、x_2、x_3、x_4。先来复习一下求非齐次方程组通解的方法。

第一步：写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩 r_1、r_2。

第二步：判断解的类型。

情况 1：若 $r_1\neq r_2$，则该非齐次方程组无解。

情况 2：若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2=n$（未知数个数），则该非齐次方程组有唯一的解，不用再进行第三步了。

情况 3：若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2<n$（未知数个数），则该非齐次方程组有无穷多解，并且需要进行第三步。

第三步：先按齐次方程组的步骤(3)求出齐次方程组的通解。然后再还原成非齐次方程组，令自由未知数取全零，求出非齐次方程组的一个特解。最后，用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解，得到的就是非齐次方程组的通解。

按照以上三个步骤，解出非齐次方程组 $\begin{cases}-x_2-x_3=0\\x_1+x_2-x_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2+x_3=0\end{cases}$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$，其中 k_1，k_2 为任意常数。

也就是说：$x_1=1+k_1+k_2$、$x_2=-k_1$、$x_3=k_1$、$x_4=k_2$。而设的是 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，所以矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1+k_1+k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$。

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$。

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}+\vec{\boldsymbol{\beta}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}$；

(Ⅱ)若 $\vec{\boldsymbol{\alpha}},\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$。

解：先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问要求证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}+\vec{\boldsymbol{\beta}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}$。设 $\vec{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，那么只需证明：

$f(x_1,x_2,x_3)=\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}(2\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}+\vec{\boldsymbol{\beta}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}})\vec{\boldsymbol{X}}$ 且矩阵 $2\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}+\vec{\boldsymbol{\beta}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵。

有些同学可能不太明白，认为只需证明 $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}(2\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}+\vec{\boldsymbol{\beta}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}})\vec{\boldsymbol{X}}$ 即可，为什么还要证明矩阵 $2\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}+\vec{\boldsymbol{\beta}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵呢?这是因为：比如某二次型既可以表示成 $\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}$，又可以表示成 $\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\vec{\boldsymbol{X}}$，而 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不是对称矩阵的话，那么该二次型的对应矩阵就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而不是矩阵 $\boldsymbol{B}$。现在大家明白了吧。

下面就来证明。

由题意可知

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2 \tag{1}$$

由于 $\vec{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，根据矩阵乘法法则，有：

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\vec{X}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha} \tag{2}$$

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{X} \tag{3}$$

由于$\vec{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\vec{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，根据矩阵乘法法则，有：

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=\vec{X}^{\mathrm{T}}\vec{\beta} \tag{4}$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{X} \tag{5}$$

将(2)式、(3)式、(4)式、(5)式均代入(1)式，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2\vec{X}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \tag{6}$$

由于矩阵乘法对于矩阵加减法满足分配律，所以(6)式可以变为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\vec{X}^{\mathrm{T}}(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\vec{X} \tag{7}$$

现在已经证明$f(x_1,x_2,x_3)=\vec{X}^{\mathrm{T}}(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\vec{X}$，又因为矩阵$2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$很明显是一个对称矩阵，所以二次型$f$对应的矩阵为$2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$。

先来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是$\vec{\alpha},\vec{\beta}$正交且均为单位向量，需要证明f在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$。这可以转化为“若$\vec{\alpha},\vec{\beta}$正交且均为单位向量，证明矩阵$2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$的三个特征值为0、1、2。

为方便表示，记矩阵$\boldsymbol{A}=2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$，那么最终只需证明矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值是0、1、2即可。

先来证明0是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值。

由于$\boldsymbol{A}=2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$，所以$r(\boldsymbol{A})=r(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})$。根据公式$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$可知$r(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}+\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\vec{\beta}\beta^{\mathrm{T}})$，所以有$r(\boldsymbol{A})\leqslant r(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})$。而$r(2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 2$，所以有$r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$。那么既然$r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，肯定就有$r(\boldsymbol{A})<3$。而矩阵$\boldsymbol{A}$是三阶矩阵，它的秩小于3就意味着它不满秩。我们知道，一个方阵不满秩可以推出该方阵所对应的行列式等于0，所以有$|\boldsymbol{A}|=0$。由此可知，0是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值(因为一个矩阵的所有特征值之积等于该矩阵所对应的行列式的值，如果0不是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值的话，特征值之积不会为0)。

再来证明1是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值。

由于$\vec{\alpha},\vec{\beta}$正交，所以有$\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\beta}=0,\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}=0$。由于$\vec{\alpha},\vec{\beta}$均为单位向量，所以有$\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}=1$，$\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\beta}=1$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\alpha}} &= (2\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} + \vec{\boldsymbol{\beta}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}})\vec{\boldsymbol{\alpha}} \\ &= 2\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\alpha}} + \vec{\boldsymbol{\beta}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\alpha}} \\ &= 2\vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}) + \vec{\boldsymbol{\beta}}(\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}) \\ &= 2\vec{\boldsymbol{\alpha}} \times 1 + \boldsymbol{\beta} \times 0 \\ &= 2\vec{\boldsymbol{\alpha}}\end{aligned}$$

根据特征值、特征向量的定义式可知，2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

最后来证明 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

由于$\vec{\boldsymbol{\alpha}},\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 正交，所以有$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}} = 0$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\alpha}} = 0$。由于$\vec{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta}$ 均为单位向量，所以有$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\alpha}} = 1$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}} = 1$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\beta}} &= (2\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} + \vec{\boldsymbol{\beta}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}})\vec{\boldsymbol{\beta}} \\ &= 2\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}} + \vec{\boldsymbol{\beta}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}} \\ &= 2\vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}) + \vec{\boldsymbol{\beta}}(\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= 2\vec{\boldsymbol{\alpha}} \times 0 + \vec{\boldsymbol{\beta}} \times 1 \\ &= \vec{\boldsymbol{\beta}}\end{aligned}$$

根据特征值、特征向量的定义式可知，1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

综上所述，由于矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值是0、1、2，所以f在正交变换下的标准形为$2y_1^2 + y_2^2$。

(22)(本题满分 11 分)

设(X,Y)是二维随机变量，X的边缘概率密度为$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, 0 < x < 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$，在给定$X = x(0 < x < 1)$的条件下，$Y$的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{3y^2}{x^3}, 0 < y < x \\ 0, 其他 \end{cases}$$

(Ⅰ)求(X,Y)的概率密度$f(x,y)$；

(Ⅱ)求 Y 的边缘概率密度$f_Y(y)$；

(Ⅲ)求 $P(X > 2Y)$。

解：先看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问求的是联合概率密度函数 $f(x,y)$。已知 X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, 0 < x < 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$，也已知在给定 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度

$$f_{Y|X}(y \mid x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, 0<y<x \\ 0, 其他\end{cases}$$，所以只需要将这两者相乘即可。

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y \mid x)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, 0<y<x<1 \\ 0, 其他\end{cases}$$

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问求的是随机变量 Y 的边缘概率密度函数 $f_Y(y)$，已知联合概率密度函数 $f(x, y)$，所以第(Ⅱ)问相当于"已知联合概率密度函数，求边缘概率密度函数"。

现在先来总结一下"已知联合概率密度函数，求边缘概率密度函数"的解题方法。

解题方法分为两个步骤。

步骤 1：确定边缘概率密度函数不为 0 的段的定义域

若需要求解的是 $f_X(x)$：

(1) 先将 $f_X(x)$ 写为 $f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y, & \square \\ 0, & 其他\end{cases}$；

(2) 然后在平面直角坐标系中画出联合概率密度函数 $f(x,y)$ 不为 0 的段的定义域，并涂上阴影；

(3) 最后看一下阴影区域中 x 可以取到的最大值和最小值是多少，即可确定"□"。

特殊情况：若确定出的"□"为"$-\infty<x<+\infty$"，$f_X(x)$ 就不用分成两段了，而是直接将 $f_X(x)$ 写为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\ -\infty<x<+\infty$。

若需要求解的是 $f_Y(y)$：

(1) 则先将 $f_Y(y)$ 写为 $f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x, & \square \\ 0, & 其他\end{cases}$；

(2) 然后在平面直角坐标系中画出联合概率密度函数 $f(x,y)$ 不为 0 的段的定义域，并涂上阴影；

(3) 最后看一下阴影区域中 y 可以取到的最大值和最小值是多少，即可确定"□"。

特殊情况：若确定出的"□"为"$-\infty<y<+\infty$"，$f_Y(y)$ 就不用分成两段了，而是直接将 $f_Y(y)$ 写为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x,\ -\infty<y<+\infty$。

步骤 2：计算

若需要求解的是 $f_X(x)$：

(1) 在刚刚画出的图中再画一条与 y 轴平行且和阴影区域相交的直线，当然会有很多

种画法，但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段，就利用这条线段上 y 的最大值和最小值来替换 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 中的 $+\infty$ 和 $-\infty$；

(2) 接着，将被积函数 $f(x,y)$ 显化为其不为 0 的段；

(3) 最后，就是纯计算了。

若需要求解的是 $f_Y(y)$：

(1) 在刚刚画出的图中再画一条与 x 轴平行且和阴影区域相交的直线，当然会有很多种画法，但无论哪种画法，这条与 x 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段，就利用这条线段上 x 的最大值和最小值来替换 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 中的 $+\infty$ 和 $-\infty$；

(2) 接着，将被积函数 $f(x,y)$ 显化为其不为 0 的段；

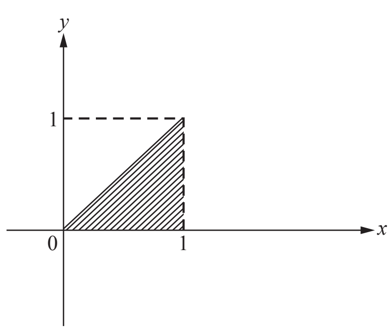
(3) 最后，就是纯计算了。

以上就是"已知联合概率密度函数，求边缘概率密度函数"的解题方法。那么针对本题而言，当然也是按照这两个步骤来做。

步骤 1：

先将 $f_Y(y)$ 写为 $f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x, & \square \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，然后在平面直角坐标系中画出联合概率密度函数 $f(x,y)$ 不为 0 的段的定义域并涂上阴影。

$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{9y^2}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，不为 0 的段是 $\dfrac{9y^2}{x}$，定义域是 $0 < y < x < 1$，如下图所示。



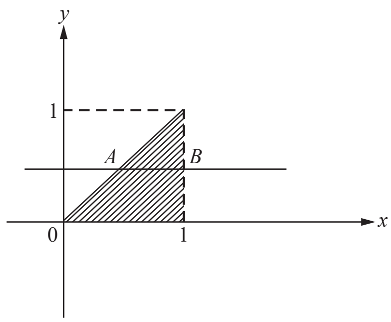
从该图可以看出，阴影区域中 y 的最大值为 1，最小值为 0，即 $0 < y < 1$，所以有：

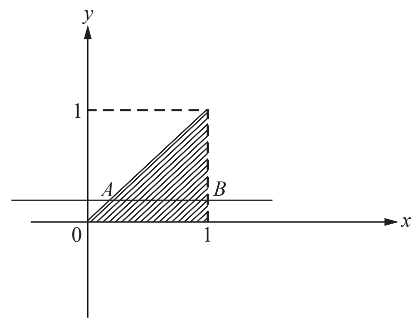
$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

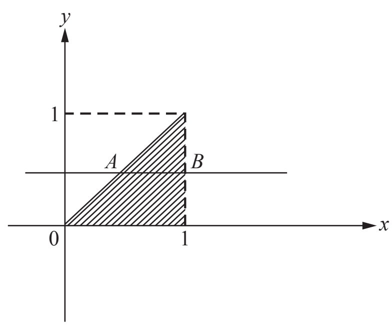
步骤 1 完成，接下来进行步骤 2，也就是算出 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$。

步骤 2：

首先，在刚刚画出的图中再画一条与 x 轴平行且和阴影区域相交的直线。







这条直线有很多种画法，但无论哪种画法，这条与 x 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上 x 的最大值肯定是在 B 点取到，最小值肯定是在 A 点取到（当然，从图中可以看出：由于这条直线有很多种画法，所以 A 点的横坐标 x 并不是一个定值）。我们只需要求出 B 点和 A 点的横坐标 x 就可以了。显然，B 点的横坐标 $x=1$，A 点的横坐标 $x=y$。所以有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{y}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

接下来将 $\int_{y}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的被积函数 $f(x,y)$ 显化为其不为 0 的段。对于本题而言，由于

$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, 0<y<x<1 \\ \text{其他}\end{cases}$，不为 0 的段是 $\dfrac{9y^2}{x}$，所以有：

$$\int_{y}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{y}^{1} \frac{9y^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

现在就剩下纯计算了。

$$\int_{y}^{1} \frac{9y^2}{x}\,\mathrm{d}x = -9y^2\ln y$$

所以：$f_Y(y)=\begin{cases}-9y^2\ln y, 0<y<1 \\ 0, \text{其他}\end{cases}$

最后来看第(Ⅲ)问。

第(Ⅲ)问是求$P(X>2Y)$，现在已知联合概率密度函数$f(x,y)$，所以第(Ⅱ)问相当于"已知联合概率密度函数，求概率"。

先来总结一下"已知联合概率密度函数，求概率P(既含X又含Y)"的解题方法：

$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

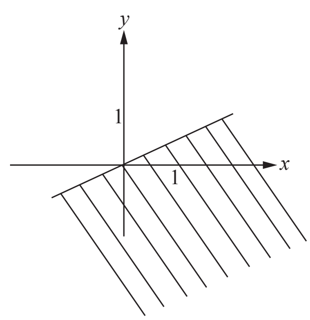
知道了解题方法后，再来看第(Ⅲ)问。

按上述解题方法，将二重积分计算出来就可以了。也就是说，接下来要进行的是纯粹的二重积分计算，与概率论学科无关了。

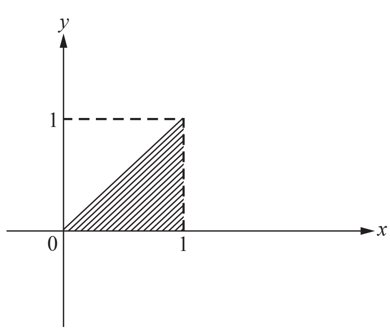
步骤1：画图。

对于本题而言，由于$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，并且求的是$P(X>2Y)$，所以不仅要画出$x>2y$的图，还要画出$0<y<x<1$的图，然后两个图取公共部分。

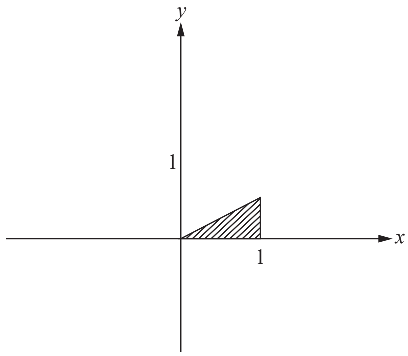
$x>2y$的图如下。



$0<y<x<1$的图如下。



所以$x>2y$的图与$0<y<x<1$的图的公共部分如下图所示。



步骤 2：根据步骤 1 的图确定积分上下限并将 $f(x,y)$ 显化成不为 0 的段。

对于本题而言，就是 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y$。

下面来解释一下上式。“$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y$”的意思是：先算 $\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y$，假设算完以后是 $\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y = A$，然后算 $\int_0^1 A\mathrm{d}x$。那么，上下限是怎么确定的呢?很简单。由于阴影区域中的 x 的最小值为 0，最大值为 1，所以有 $\int_0^1 \mathrm{d}x$；然后画一条与 y 轴平行且与阴影区域相交的直线，即可确定出 0、$\frac{x}{2}$。

步骤 3：计算。

对于本题而言，就是计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y$。

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y = \frac{1}{8}$$

所以本题答案为 $\frac{1}{8}$。

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，其中 θ 为未知参数且大于零。$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

（Ⅰ）求 θ 的矩估计量；

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量。

解：本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

第(Ⅰ)问是求 θ 的矩估计量。求矩估计的题比较简单，因为有固定的解题套路，下面就来总结一下这一固定解题套路。

"与矩估计有关的题"的解题方法：看一下题中所给的分布律或概率密度函数中到底含有一个未知参数还是两个未知参数。若只含有一个未知参数 a，则按照步骤①来做；若含有两个未知参数 a 和 b，则按照步骤②来做。

①首先要计算出 $E(X)$，记为 $E(X)=A$(A 中必含有未知参数 a)；接着，用 $\overline{X}$ 替换 $E(X)$，用 $\hat{a}$ 替换 A 中的未知参数 a，把 $\hat{a}$ 解出来即可，$\hat{a}$ 就是未知参数 a 的矩估计。

②首先要计算出 $E(X)$ 和 $E(X^2)$，记为 $E(X)=A$，$E(X^2)=B$(A 和 B 中必含有未知参数 a、b)；接着，用 $\overline{X}$ 替换 $E(X)$，用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 替换 $E(X^2)$，用 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 替换 A 和 B 中的未知参数 a、b，把 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 解出来即可。$\hat{a}$ 就是未知参数 a 的矩估计，$\hat{b}$ 就是未知参数 b 的矩估计。

下面来看第(Ⅰ)问。

由于本题所给的概率密度函数中只含有一个未知参数 θ，所以应该按照上述解题方法中的步骤①来求解。

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$，由于 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，所以

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{+\infty}\frac{x\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x\\&=\theta\end{aligned}$$

现在用 $\overline{X}$ 替换 $E(X)$，用 $\hat{\theta}$ 替换 θ，然后解 $\hat{\theta}$ 即可。

当然，对于本题而言，根本就不用解。因为用 $\overline{X}$ 替换 $E(X)$、用 $\hat{\theta}$ 替换 θ 后，直接就得到了 $\hat{\theta}=\overline{X}$。

所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求 θ 的最大似然估计量。求最大似然估计的题也有其固定的解题套路，下面就给大家总结一下。

"与最大似然估计有关的题"的解题方法：看一下题中给的到底是分布律还是概率密度函数，同时看题中到底含有一个未知参数还是两个未知参数。

若题中给的是分布律且只含有一个未知参数 a，则按照步骤①来做；若题中给的是分布律且含有两个未知参数 a、b，则按照步骤②来做；若题中给的是概率密度函数且只含有一个

未知参数 a，则按照步骤 ③ 来做；若题中给的是概率密度函数且含有两个未知参数 a、b，则按照步骤 ④ 来做。

① 首先需要构造出似然函数 $L(a) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;a)$；接着，求当 a 取何值时，似然函数 $L(a)$ 能达到最大值。求得的值就是未知参数 a 的最大似然估计 $\hat{a}$。具体来说，求法是：观察或者对似然函数 $L(a)$ 取对数得 $\ln L(a)$ 之后对未知参数 a 求导。

② 首先需要构造出似然函数 $L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;a,b)$；接着，求当 a、b 取何值时，似然函数 $L(a,b)$ 能达到最大值。求得的值就是未知参数 a、b 的最大似然估计 $\hat{a}$、$\hat{b}$。具体来说，求法是：观察或者对似然函数 $L(a,b)$ 取对数得 $\ln L(a,b)$ 之后对未知参数 a、b 求导。

③ 首先需要构造出似然函数 $L(a) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;a)$；接着，求当 a 取何值时，似然函数 $L(a)$ 能达到最大值。求得的值就是未知参数 a 的最大似然估计 $\hat{a}$。具体来说，求法是：观察或者对似然函数 $L(a)$ 取对数得 $\ln L(a)$ 之后对未知参数 a 求导。

④ 首先需要构造出似然函数 $L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;a,b)$；接着，求当 a、b 取何值时，似然函数 $L(a,b)$ 能达到最大值。求得的值就是未知参数 a、b 的最大似然估计 $\hat{a}$、$\hat{b}$。具体来说，求法是：观察或者对似然函数 $L(a,b)$ 取对数得 $\ln L(a,b)$ 之后对未知参数 a、b 求导。

知道了解题套路后，来看第（Ⅱ）问。

由于已知概率密度函数，并且此概率密度函数中只有一个未知参数 θ，所以应该按照上述解题方法中的步骤 ③ 来求解。

首先构造似然函数 $L(\theta)$。

由于

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

所以

$$f(x_1;\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta^2}{x_1^3} e^{\frac{\theta}{x_1}}, & x_1 > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$f(x_2;\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta^2}{x_2^3} e^{\frac{\theta}{x_2}}, & x_2 > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$f(x_n;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x_n^3}e^{\frac{\theta}{x_n}},x_n>0\\0,\quad 其他\end{cases}$$

所以似然函数 $L(\theta)$ 为

$$L(\theta)=f(x_1)\times f(x_2)\times\cdots\times f(x_n)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^2}{x_i^3}\cdot e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}}$$

下面求的是当 θ 取何值时，似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^2}{x_i^3}\cdot e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}}$ 能达到最大值。怎么求呢?观察，或者取对数然后求导。

我们先观察一下，能看出来当 θ 取何值时，似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^2}{x_i^3}\cdot e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}}$ 达到最大值吗?很明显是看不出来的。因此我们采用“取对数求导法”。

先取对数。

由于似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^2}{x_i^3}\cdot e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}}$，所以

$$\ln L(\theta)=\ln\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^2}{x_i^3}\cdot e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}}$$

$$=2n\ln\theta-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i^3-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}$$

再对未知参数 θ 求导。

$\ln L(\theta)$ 对 θ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

求导是为了找出“最大值点”，也就是说，要令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，即

$$\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$$

解得 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}$。

所以未知参数 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i}}$。

2012 年全国硕士研究生
入学统一考试试题及精解

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

（1）曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为(　　)。

(A)0

(B)1

(C)2

(D)3

解： 渐近线分为三种，分别是：水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线。

要想做对本题，就必须知道这三种渐近线究竟应该怎么求。所以，现在先来给大家讲一下三种渐近线的求法。

先来看水平渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，让求该函数的水平渐近线时，需要分 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情况。

$x\to+\infty$ 的情况：

若计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的结果是“常数 a”，则 $y=a$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

$x\to-\infty$ 的情况：

若计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 的结果是“常数 b”，则 $y=b$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线(如果“常数 a = 常数 b”，那 $y=a$ 和 $y=b$ 就是同一条水平渐近线)。

再来看铅直渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，让求该函数的铅直渐近线时，我们需要找一种点，函数 $f(x)$ 在该点处没有定义，但是存在一个该点的左去心邻域(或者右去心邻域，去心邻域)，函数 $f(x)$ 在该邻域内有定义。

我们把找到的点记为 x_0。

然后计算 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，如果这两者的计算结果中至少有一个是 ∞，那么就说明

$x = x_0$ 是函数 $f(x)$ 的铅直渐近线。

最后看斜渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，让求该函数的斜渐近线时，需要分 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 两种情况。

$x \to +\infty$ 的情况：

若计算 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$，结果是"非零常数 a"，再计算一下 $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$，若计算出的结果是"常数 b"，则 $y = ax + b$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

$x \to -\infty$ 的情况：

若计算 $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$，结果是"非零常数 c"，再计算一下 $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - cx]$，若计算出的结果是"常数 d"，则 $y = ax + d$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线(如果"常数 a = 常数 b"、"常数 c = 常数 d"，那 $y = ax + b$ 和 $y = cx + d$ 就是同一条斜渐近线)。

现在，水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线的求法已经给大家讲完了。现在来看本题。

本题给的曲线是 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$。

先来看曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 有没有水平渐近线。

$x \to +\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$。

所以 $y = 1$ 是曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的一条水平渐近线。

$x \to -\infty$ 的情况：

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$。

所以 $y = 1$ 是曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的一条水平渐近线。

综上所述，曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 有一条水平渐近线。

再来看曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 有没有铅直渐近线。

由于 $x = 1$ 和 $x = -1$ 是函数 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的没有定义的点，所以需要计算一下 $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$、$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$、$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$、$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$。

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$。

所以 $x=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的一条铅直渐近线（而且 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 就可以不用再求了）。

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\neq\infty$。

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\neq\infty$。

所以 $x=-1$ 不是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的一条铅直渐近线。

综上所述，曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有一条铅直渐近线。

最后来看曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有没有斜渐近线。

大家应该听说过一句话，“有水平无斜，有斜无水平”。这句话的意思是：如果某曲线在 $x\to+\infty$ 的情况下有水平渐近线，那么该曲线在 $x\to+\infty$ 的情况下肯定没有斜渐近线。如果某曲线在 $x\to-\infty$ 的情况下有水平渐近线，那么该曲线在 $x\to-\infty$ 的情况下肯定没有斜渐近线。

而对于本题所给的曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 而言，它在 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 的情况下都有水平渐近线，所以它在 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 的情况下肯定没有斜渐近线。

由此可知，曲线 $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$ 没有斜渐近线。

综上所述，本题所给的曲线共有两条渐近线，所以本题应该选择(C) 选项。

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=($　　$)$。

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$

(B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$

(D) $(-1)^n n!$

解： 本题乍一看似乎很简单，似乎就是先求出导函数，然后把 0 代入导函数中就可以了。

实际上，本题并没有那么简单。难在哪里？难就难在“如何求导”。因为本题所给的函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$ 是 n 项连乘的形式，所以求导会比较困难。

那么怎么办呢？我们要想办法将本题所给的多项连乘的函数转化为两项相乘的形式。

怎么转化？设辅助函数就可以了。

设 $g(x)=(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，为什么要这样设呢？因为这样设之后，$f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$ 就变成 $f(x)=(e^x-1)g(x)$，多项相乘就被转化为两项相乘。

下面来求 $f'(x)$。

由于 $f(x)=(e^x-1)g(x)$，所以 $f'(x)=e^x g(x)+(e^x-1)g'(x)$。

$f'(x)$ 已经求出来了，接下来只需把 0 代入 $f'(x)$ 中，计算出 $f'(0)$ 就可以了。

由于 $f'(x)=e^x g(x)+(e^x-1)g'(x)$，所以 $f'(0)=e^0 g(0)+(e^0-1)g'(0)$。

接下来计算 $e^0 g(0)+(e^0-1)g'(0)$，计算结果就是本题最终的答案。

由于 $e^0=1$，所以 $e^0 g(0)+(e^0-1)g'(0)=g(0)$。

现在只需计算出 $g(0)$ 即可。

由于设的 $g(x)=(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，所以

$$\begin{aligned}g(0)&=(e^{2\times0}-2)\cdots(e^{n\times0}-n)\\&=(1-2)\times(1-3)\times\cdots\times(1-n)\\&=(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]\\&=(-1)^{n-1}\times1\times2\times\cdots\times(n-1)\\&=(-1)^{n-1}\times(n-1)!\end{aligned}$$

所以本题应该选择(A)选项。

(3) 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)r\,dr=(\quad)$。

(A) $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$

(B) $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)dy$

(C) $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$

(D) $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)dy$

解： $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)r\,dr$ 是一个以“极坐标系法”来计算的二重积分，而本题所给的四个选项均是以“直角坐标系法”来计算的二重积分。

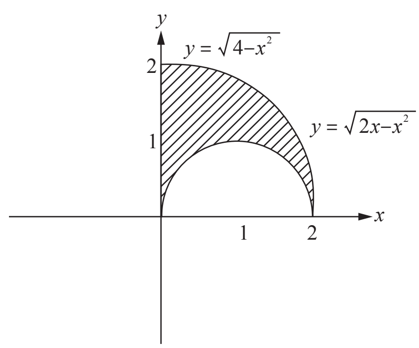
首先，根据被积函数，可以把(A)选项和(C)选项排除掉。这是因为以“极坐标系法”来计算的二重积分时，被积函数中的“r”是多上去的。如果采用“直角坐标系法”，这个“r”就是不存在的。而(A)选项和(C)选项却把“r”写为“$\sqrt{x^2+y^2}$”，所以可以把(A)选项和

(C) 选项排除掉。

再来看(B) 选项。

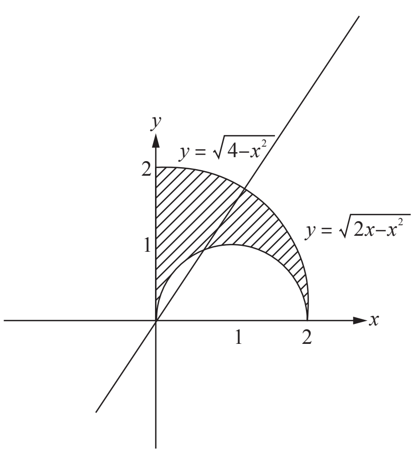
(B) 选项是$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$。根据$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$，先在平面直角坐标系中画出积分区域 D 的图。

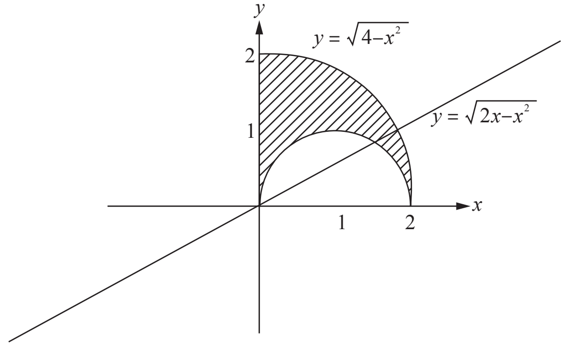
由$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$ 的积分上、下限可知，积分区域 D 是由 $x=0$、$x=2$、$y=\sqrt{2x-x^2}$、$y=\sqrt{4-x^2}$ 所围成的闭区域，如下图所示。

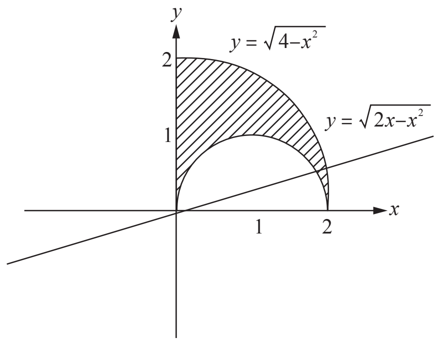


按照上图，把(B) 选项所给的二重积分转化为“极坐标系法”来做，看看转化完之后与题目所给的是否一样。如果一样，就选(B)。如果不一样，就选(D)。

毫无疑问 θ 的上、下限是 0 和$\dfrac{\pi}{2}$，那么 r 的上、下限呢?我们过原点做一条与阴影区域相交的直线。当然，这条直线有无数种画法，如下图所示为其中三种画法。







然而，这条直线虽然有无数种画法，但是该直线与阴影区域的边界肯定是交于两个点。在这两个点中，离原点距离近的点肯定是在 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上，离原点距离远的点肯定是在 $y=\sqrt{4-x^2}$ 上。

所以，θ 的积分下限确定方法是：把 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$ 代入 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 中，解得 r。θ 的积分上限确定方法是：把 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$ 代入 $y=\sqrt{4-x^2}$ 中，解得 r。

通过计算可知，θ 的积分上限是 2，下限是 $2\cos\theta$。

综上所述，(B) 选项所给的二重积分转化为“极坐标系法”后得到的是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)r\mathrm{d}r$，所以本题应该选择(B) 选项。

(4) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^a}$ 绝对收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-a}}$ 条件收敛，则(　　)。

(A) $0<a\leqslant\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{2}<a\leqslant1$

(C) $1<a\leqslant\frac{3}{2}$

(D) $\frac{3}{2}<a<2$

解： 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^a}$ 绝对收敛。什么叫绝对收敛？它是指该级数所对应的正项级数是收敛的，这也就意味着 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^a}$ 收敛。而 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^a}$ 可以改写为 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^{a-\frac{1}{2}}}$，所以说明 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^{a-\frac{1}{2}}}$ 收敛。

由于极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n^{a-\frac{1}{2}}}}{\dfrac{1}{n^{a-\frac{1}{2}}}}=1$，根据正项级数的比较判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^{a-\frac{1}{2}}}$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{a-\frac{1}{2}}}$的敛散性相同，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{a-\frac{1}{2}}}$收敛。

由此可知$a-\dfrac{1}{2}>1$，解得$a>\dfrac{3}{2}$。

此时可以知道本题应该选择(D)选项。有的同学可能会觉得“级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-a}}$条件收敛”这个条件根本就没用上。的确，是没用上。如果本题是一道填空题(问a的取值范围)，那么我们就必须用“级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-a}}$条件收敛”这个条件。但是本题是选择题，我们单纯凭借$a>\dfrac{3}{2}$就可以断定本题选择(D)选项(因为(A)、(B)、(C)选项都不满足$a>\dfrac{3}{2}$)。

(5) 设$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量组线性相关的为(　　)。

(A) $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$

(B) $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4$

(C) $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4$

(D) $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4$

解：先来看(A)选项。

由于$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，所以矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$。这是一个方阵，那么它就一定存在对应的行列式。即

$$|\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

通过计算可知$|\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -c_1$，而 c_1 为任意常数。我们知道，如果 $c_1 = 0$ 的话(即行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$)，那么就有：矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$不满秩，即矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$的秩小于3，那么向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$就是线性相关的。可如果 c_1 不等于0呢?那向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$就是线性无关的。因为 c_1 为任意常数，所以不能确定向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$到底是线性相关的还是线性无关的，所以本题不能选择(A)选项。

再来看(B)选项。

由于$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$，所以矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{pmatrix}$。这是一个方阵，对应的行列式为

$$|\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}$$

通过计算可知$|\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = c_1$，而 c_1 为任意常数。如果 $c_1 = 0$，那么就有：矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4)$不满秩，即矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4)$的秩小于3，向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4$就是线性相关的。如果 c_1 不等于0，向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4$就是线性无关的。$c_1$ 为任意常数，所以不能确定向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4$到底是线性相关的还是线性无关的，所以本题不能选择(B)选项。

再来看(C)选项。

由于$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{\alpha}}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$，所以矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$。这是一个方阵，对应的行列式为

$$|\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

通过计算可知 $|\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0$，这说明不管 c_1,c_2,c_3,c_4 取何值，$|\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4|$ 都等于0，即矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4)$都不满秩，矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4)$的秩小于3，那么向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4$ 就是线性相关的。所以本题应该选择(C)选项。

最后来看(D)选项。

由于$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$，所以矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$。这是一个方阵，对应的行列式为

$$|\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

通过计算可知 $|\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = -c_3 - c_4$，而 c_3、c_4 为任意常数。如果 $-c_3 - c_4 = 0$，那么就有：矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4)$不满秩，即矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4)$的秩小于3，向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4$ 就是线性相关的。如果 $-c_3-c_4$ 不等于0，那向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4$ 就是线性无关的。c_3、c_4 为任意常数，所以不能确定向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4$ 到底是线性相关的还是线性无关的，所以本题不能选择(D)选项。

综上所述，本题应该选择(C)选项。

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。若 $\boldsymbol{P} = (\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$，$\boldsymbol{Q} = (\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} = (\quad)$。

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解：由于 $\boldsymbol{Q}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$，所以可以将矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 写为 $\boldsymbol{Q}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

而 $\boldsymbol{P}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$，所以有 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

由此可得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]^{-1}\times\boldsymbol{A}\times[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]$$

根据公式 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，上式可以变为

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]^{-1}\times\boldsymbol{A}\times[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\times P^{-1}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

我们知道，矩阵的乘法具有结合律，可以随便加括号，所以有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]^{-1}\times\boldsymbol{A}\times[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\times\boldsymbol{P}^{-1}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\times(\boldsymbol{P}^{-1}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P})\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

已知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

接下来计算一下$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$。

由于$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是初等矩阵$\boldsymbol{E}_{12}(1)$，所以没必要用常规方法来求其逆矩阵，直接根据初等矩阵的逆矩阵公式$[\boldsymbol{E}_{ij}(k)]^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}(-k)$就可求得$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

所以$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

接下来利用矩阵乘法算出这三个矩阵的乘积就可以了。不过要提示大家一点，由于最左侧的矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$和最右侧的矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$都是初等矩阵，所以没必要按照矩阵乘法法则来计算，用如下方法会比较方便：

首先要求$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。由于$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是单位矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的第 1 行乘以 -1 加到第 2 行得到的，所以将$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$的第 1 行乘以 -1 加到第 2 行就是$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。所以$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。

由此可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由于$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是单位矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的第 2 列乘以 1 加到第 1 列得到的，所以将

$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$的第 2 列乘以 1 加到第 1 列就是$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，所以$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，本题应该选择(B)选项。

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间(0,1)上的均匀分布，则 $P(X^2+Y^2\leqslant 1)=($　　$)$。

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{\pi}{8}$

(D) $\frac{\pi}{4}$

解：在正式讲解这道题之前，先来给大家复习一个很重要的知识点：

若随机变量 X 服从区间(a,b)上的均匀分布，则该随机变量的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},a<x<b\\0,其他\end{cases}$$

也就是说，一旦知道了某随机变量服从均匀分布，就相当于知道了该随机变量的概率密度函数。

现在来看本题。

已知随机变量X服从区间(0,1)上的均匀分布，随机变量Y也服从区间(0,1)上的均匀分布，根据上面复习的知识点，就有

随机变量 X 的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\0,其他\end{cases}$

随机变量 Y 的概率密度函数为$f(y)=\begin{cases}1,0<y<1\\0,其他\end{cases}$

已知随机变量X与Y相互独立。对于两个连续型随机变量X和Y而言，相互独立就意味

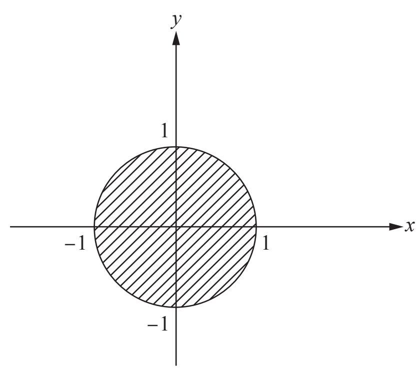
着它们的联合概率密度函数等于两个边缘概率密度函数的乘积，即 $f(x,y)=f(x)f(y)$。所以对于本题而言，有

$$f(x,y)=f(x)f(y)=\begin{cases}1,0<x<1,0<y<1\\0,其他\end{cases}$$

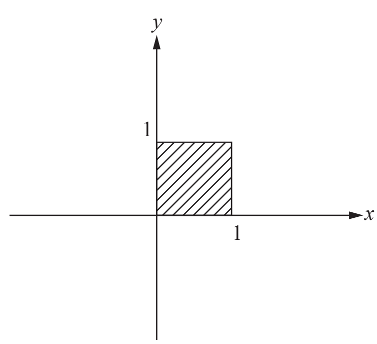
现在已经知道联合概率密度函数 $f(x,y)$，而本题求的是 $P(X^2+Y^2\leqslant 1)$。“已知联合概率密度函数求概率”的方法就是二重积分，所以现在计算二重积分 $P(X^2+Y^2\leqslant 1)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 即可。

由于 $f(x,y)=\begin{cases}1,0<x<1,0<y<1\\0,其他\end{cases}$，并且求的是 $P(X^2+Y^2\leqslant 1)$，所以我们要画出 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的图，还要画出 $0<x<1,0<y<1$ 的图，然后两个图取公共部分。

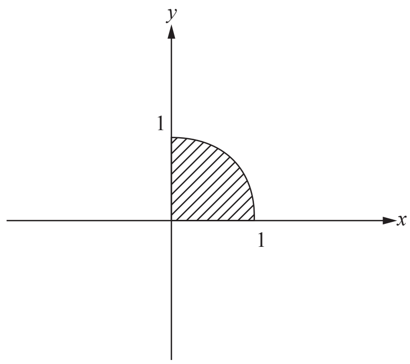
$x^2+y^2\leqslant 1$ 的图如下图所示。



$0<x<1,0<y<1$ 的图如下图所示。



所以 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的图与 $0<x<1,0<y<1$ 的图的公共部分如下图所示。



现在要根据刚画的图确定积分上、下限并将 $f(x,y)$ 显化成不为 0 的段。

对于本题而言，就是 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1\times r)\mathrm{d}r$。

剩下的工作就是计算出 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1\times r)\mathrm{d}r$。

计算可知 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1\times r)\mathrm{d}r = \dfrac{\pi}{4}$

所以本题应该选择(D)选项。

(8) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma > 0)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 的分布为(　　)。

(A) $N(0,1)$

(B) $t(1)$

(C) $\chi^2(1)$

(D) $F(1,1)$

解：我们知道，样本与总体肯定是同分布的，既然 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)$ 的样本，必然就有 $X_1 \sim N(1,\sigma^2)$、$X_2 \sim N(1,\sigma^2)$、$X_3 \sim N(1,\sigma^2)$、$X_4 \sim N(1,\sigma^2)$。

由于来自同一总体的样本之间是相互独立的，所以有：X_1、X_2 相互独立。

现在告诉大家一个定理。

定理 1　若 $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, …, $X_n \sim N(\mu_n,\sigma_n^2)$，且 X_1、X_2、…、X_n 相互独立，则

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n \sim N(c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_n\mu_n, c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_n^2\sigma_n^2)$$

对于本题而言，由于 X_1、X_2 相互独立，且 $X_1 \sim N(1,\sigma^2)$, $X_2 \sim N(1,\sigma^2)$，由定理 1 可知：

$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$

再告诉大家一个定理。

定理 2　若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$。

对于本题而言，由于 $X_1 - X_2 \sim N(0,2\sigma^2)$，由定理 2 可知：$\dfrac{X_1 - X_2 - 0}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$，化简得

$$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1) \tag{1}$$

由于来自同一总体的样本之间是相互独立的，所以有：X_3、X_4 相互独立。

由前面介绍的定理 1 可知：$X_3 + X_4 \sim N(2, 2\sigma^2)$。现在设 $Y = X_3 + X_4$，所以有 $Y \sim N(2, 2\sigma^2)$。

再给大家讲一个定理。

定理 3　若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$。

对于本题而言，由于 $Y \sim N(2, 2\sigma^2)$，所以根据定理 3 可知 $Y - 2 \sim N(0, 2\sigma^2)$。

由定理 2 可知 $\dfrac{Y-2-0}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$，化简得 $\dfrac{Y-2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$。由于 $Y = X_3 + X_4$，所以 $\dfrac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$。

现在来看 χ^2 分布的定义。

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且均服从 $N(0,1)$，则称 $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$。

以上就是 χ^2 分布的定义。由该定义可知，对于本题而言，由于 $\dfrac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$，所以

$$\frac{(X_3 + X_4 - 2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1) \tag{2}$$

现在我要告诉大家：$\dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 和 $\dfrac{(X_3 + X_4 - 2)^2}{2\sigma^2}$ 是相互独立的。

有的同学可能不明白为什么 $\dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 和 $\dfrac{(X_3 + X_4 - 2)^2}{2\sigma^2}$ 是相互独立的，我来给大家解释一下，是因为以下两条同时满足。

第一条：$\dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$、$\dfrac{(X_3 + X_4 - 2)^2}{2\sigma^2}$ 这两者中所出现的随机变量没有重叠(举个反例：比

如$\frac{X_2+X_3+X_4}{\sqrt{8}}$、$\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{12}}$这两者中出现了重叠随机变量 X_4，所以$\frac{X_2+X_3+X_4}{\sqrt{8}}$、$\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{12}}$不是相互独立的)。

第二条：$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$、$\frac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}$这两者中共出现了四个随机变量，而这四个随机变量是相互独立的。

正是由于这两条同时满足，所以$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$、$\frac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}$是相互独立的。

综上所述，有：

① $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$；

② $\frac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$；

③ $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$、$\frac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}$是相互独立的。

现在再来看一下 t 分布的定义。

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，则称$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$服从自由度为 n 的 t 分布，记作$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)$。

根据 t 分布的定义，可以知道，对于本题来说有

$$\frac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}}} \sim t(1)$$

化简得

$$\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|} \sim t(1)$$

所以本题应该选择(B)选项。

二、填空题：9 ~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ________。

解：先来计算一下极限$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x$。

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x=1$。

再来计算一下极限$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\cos x-\sin x}\right)$。

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\cos x-\sin x}\right)=\infty$

所以本题属于1^{∞}型的函数极限计算题，我们就按照“1^{∞}型”的解题方法来做就可以了。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\ln(\tan x)\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]}$$

我们只需算出$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\dfrac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]$就大功告成了。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cos x-\sin x}\tag{1}$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\tan x}{\cos x-\sin x}$可以写为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan x-1)}{\cos x-\sin x}\tag{2}$$

(1) 式、(2) 式相结合，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan x-1)}{\cos x-\sin x}\tag{3}$$

由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x-1)=0$，所以根据等价无穷小可知

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan x-1)}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}\tag{4}$$

(3) 式、(4) 式相结合，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}\tag{5}$$

由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x-1)=1-1=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}$属于$\dfrac{0}{0}$型的函数极限计算题，可以对其使用洛必达法则。即

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x-1)'}{(\cos x-\sin x)'} \tag{6}$$

(5) 式、(6) 式相结合，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x-1)'}{(\cos x-\sin x)'} \tag{7}$$

而

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x-1)'}{(\cos x-\sin x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\sin x-\cos x} \tag{8}$$

(7) 式、(8) 式相结合，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\sin x-\cos x} \tag{9}$$

而由代入法可知

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} \tag{10}$$

(9) 式、(10) 式相结合，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} \tag{11}$$

通过计算可知

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2} \tag{12}$$

(11) 式、(12) 式相结合，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]=-\sqrt{2} \tag{13}$$

现在我们已经算出了 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]=-\sqrt{2}$，所以 $e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]}=e^{-\sqrt{2}}$。

所以本题应填 $e^{-\sqrt{2}}$。

（10）设函数$f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, x\geqslant 1\\ 2x-1, x<1\end{cases}$，$y=f(f(x))$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=$ ________。

解：本题求的是$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}$，已知$y=f(f(x))$，估计有很多同学的想法是先求出$y$。这种做法虽然可以，但计算量非常大，导致费时且易出错，所以并不是最好的方法。

那么最好的方法是什么呢？就是：利用复合函数求导法则。

由于$f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, x\geqslant 1\\ 2x-1, x<1\end{cases}$，而 e 大约是 2.71（也就是说 $\mathrm{e}>1$），所以$f(\mathrm{e})=\ln\sqrt{\mathrm{e}}=\ln\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\ln\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}$。

所以
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=f'\left(\frac{1}{2}\right)\times f'(\mathrm{e}) \tag{1}$$

由于$f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, x\geqslant 1\\ 2x-1, x<1\end{cases}$，所以

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=(2x-1)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2 \tag{2}$$

$$f'(\mathrm{e})=(\ln\sqrt{x})'\Big|_{x=\mathrm{e}}=\frac{1}{2\mathrm{e}} \tag{3}$$

把(2)式、(3)式代入(1)式，得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=2\times\frac{1}{2\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}} \tag{4}$$

所以本题应填$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。

（11）设连续函数$z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则$\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$ ________。

解：本题求的是$\mathrm{d}z|_{(0,1)}$，我们知道$\mathrm{d}z|_{(0,1)}=\dfrac{\partial f(0,1)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(0,1)}{\partial y}\mathrm{d}y$，所以要求出$\dfrac{\partial f(0,1)}{\partial x}$和$\dfrac{\partial f(0,1)}{\partial y}$。

在正式讲解本题之前，先来讲解一下二元函数在某一点可微的定义。

对于二元函数$z=f(x,y)$而言，如果

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$成立（当

然，是在 $\Delta x \to 0$，$\Delta y \to 0$ 的条件下)，则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处可微。

下面来看本题。

已知$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，并且可以计算出$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\sqrt{x^2+(y-1)^2}=0$，所以必有$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}(f(x,y)-2x+y-2)=0$。

有的同学可能不太明白为什么，那我就来具体的说一下，对于一元函数的极限而言，有如两个结论成立：

结论 1；在“$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$ 非零常数 C”的前提下，若$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$；若$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$。

关于结论 1 的解释：已知$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$ 非零常数 C，则如果单独算分母的极限是 0 的话，那么单独算分子的极限必然也是 0;如果单独算分子的极限是 0 的话，那么单独算分母的极限必然也是 0。

结论 2：在“$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$”的前提下，若$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$。

关于结论2的解释：已知$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则如果单独算分母的极限是0，那么单独算分子的极限必然也是0。

以上两个结论对于二元函数的极限也同样适用。现在来看$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$，单独算分母的话，那么$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\sqrt{x^2+(y-1)^2}=0$，并且已知$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则根据结论 2 有$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}(f(x,y)-2x+y-2)=0$。

由于$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}(f(x,y)-2x+y-2)$ 等于0，而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}(f(x,y)-2x+y-2)$ 又等于$f(x,y)-1$，所以有

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}f(x,y)-1=0$

解得$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}f(x,y)=1$。

又已知函数$f(x,y)$ 是连续函数，它在定义域上的任何一点都连续，所以它在$(0,1)$ 处连续。所谓连续，就是指极限值等于函数值，所以有$f(0,1)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}f(x,y)=1$。

这样我们就可以将题中所给的$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 改写为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}$

$\dfrac{f(x,y)-f(0,1)-2x+(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$。令 $\Delta x=x$，$\Delta y=y-1$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-f(0,1)-2x+(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 可以改写为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(0+\Delta x,1+\Delta y)-f(0,1)-2\Delta x+\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

根据高阶无穷小的定义，上式可以进一步整理为

$$f(0+\Delta x,1+\Delta y)-f(0,1)=2\Delta x+\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

当然，这是在 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 的条件下。

由可微的定义式可知 $\dfrac{\partial f(0,1)}{\partial x}=2$，$\dfrac{\partial f(0,1)}{\partial y}=-1$。

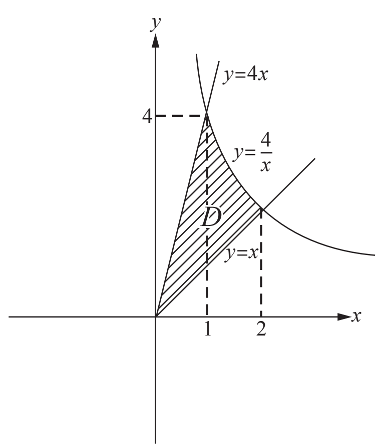
所以 $dz\big|_{(0,1)}=\dfrac{\partial f(0,1)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(0,1)}{\partial y}dy=2dx-1dy$。

所以本题应填 $2dx-1dy$。

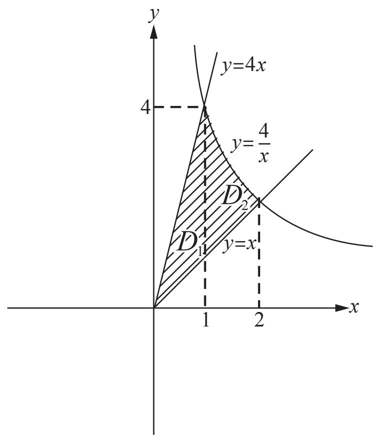
（12）由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为________。

解： 本题求的是由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积。首先需要在平面直角坐标系中画出图来。

$y=\dfrac{4}{x}$ 是反比例函数，$y=x$ 是直线，$y=4x$ 也是直线，这三条线在第一象限中围成的平面图形如下图所示。



将积分区域 D 分成 D_1 和 D_2 两个区域，如下图所示。



所以有

$$S_D = S_{D_1} + S_{D_2} \tag{1}$$

下面利用定积分来计算一下区域 D_1 的面积 S_{D_1} 和区域 D_2 的面积 S_{D_2}。

先来算区域 D_1 的面积 S_{D_1}。

区域 D_1 很明显是由 $x = 0$、$x = 1$、$y = 4x$、$y = x$ 这四条线所围成的，所以

$$S_{D_1} = \int_0^1 (4x - x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} \tag{2}$$

再来算区域 D_2 的面积 S_{D_2}。

区域 D_2 很明显是由 $x = 1$、$x = 2$、$y = \frac{4}{x}$、$y = x$ 这四条线所围成的，所以

$$S_{D_2} = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - x\right)\mathrm{d}x = 4\ln 2 - \frac{3}{2} \tag{3}$$

把(2)式、(3)式代入(1)式得

$$S_D = \frac{3}{2} + 4\ln 2 - \frac{3}{2} = 4\ln 2 \tag{4}$$

所以本题应填 $4\ln 2$。

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}| = 3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*| =$ ________。

解： 由于矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵(都是 3 阶方阵)，所以有

$$|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{B}| \times |\boldsymbol{A}^*| \tag{1}$$

$\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行交换得来的，所以有

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}| \tag{2}$$

(1) 式、(2) 式相结合，得

$$|\boldsymbol{BA}^*| = -|\boldsymbol{A}| \times |\boldsymbol{A}^*| \tag{3}$$

在线性代数中，有公式 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$。对于本题而言，由于 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，所以 $n=3$，所以

$$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^2 \tag{4}$$

(3) 式、(4) 式相结合，得

$$|\boldsymbol{BA}^*| = -|\boldsymbol{A}| \times |\boldsymbol{A}|^2 \tag{5}$$

(5) 式可以化简为

$$|\boldsymbol{BA}^*| = -|\boldsymbol{A}|^3 \tag{6}$$

已知

$$|\boldsymbol{A}| = 3 \tag{7}$$

将(7) 式代入(6) 式，得

$$|\boldsymbol{BA}^*| = -27 \tag{8}$$

所以本题应填 -27。

(14) 设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，$P(AB \mid \overline{C}) =$ ________。

解： 根据条件概率公式，有

$$P(AB \mid \overline{C}) = \frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})} \tag{1}$$

由于某随机事件的概率与其对立事件的概率之和肯定是1，所以有

$$P(C) + P(\overline{C}) = 1 \tag{2}$$

已知

$$P(C) = \frac{1}{3} \tag{3}$$

(2) 式、(3) 式相结合，可解得

$$P(\overline{C}) = \frac{2}{3} \tag{4}$$

(1) 式、(4) 式相结合，得

$$P(AB \mid \overline{C}) = \frac{P(AB\overline{C})}{\frac{2}{3}} \tag{5}$$

根据减法公式 $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$ 可得

$$P(AB\overline{C}) = P(AB) - P(ABC) \tag{6}$$

(5) 式、(6) 式相结合，得

$$P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB)-P(ABC)}{\frac{2}{3}} \tag{7}$$

已知

$$P(AB)=\frac{1}{2} \tag{8}$$

(7)式、(8)式相结合，得

$$P(AB\mid\overline{C})=\frac{\frac{1}{2}-P(ABC)}{\frac{2}{3}} \tag{9}$$

由于A与C互不相容，所以有$AC=\phi$。可知ABC就一定也等于ϕ，即$ABC=\phi$，所以有

$$P(ABC)=0 \tag{10}$$

(9)式、(10)式相结合，得

$$P(AB\mid\overline{C})=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} \tag{11}$$

解得

$$P(AB\mid\overline{C})=\frac{3}{4} \tag{12}$$

所以本题应填$\frac{3}{4}$。

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$。

解： $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$可以写为

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to0}\left(e^{x^2}\cdot\frac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}\right) \tag{1}$$

可以将$\lim\limits_{x\to0}\left(e^{x^2}\cdot\frac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}\right)$拆为

$$\lim_{x\to0}\left(e^{x^2}\cdot\frac{-e^2-2\cos x-x^2}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}e^{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4} \tag{2}$$

(1) 式、(2) 式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}e^{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}\tag{3}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}e^{x^2}=1\tag{4}$$

所以(3) 式可以变为

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}\tag{5}$$

在(5) 式的等式右侧的加一个负号，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{2-2\cos x-x^2}-1}{x^4}\tag{6}$$

根据等价无穷小替换，得

$$-\lim_{x\to 0}\frac{e^{2-2\cos x-x^2}-1}{x^4}=-\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2}{x^4}\tag{7}$$

(6) 式、(7) 式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=-\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2}{x^4}\tag{8}$$

(8) 式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4}\tag{9}$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}x^4=0$，$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2\cos x-2)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\cos x-2}{x^4}$属于$\dfrac{0}{0}$型的函数极限计算题，可以对其使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}\tag{10}$$

(10) 式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x^3}\tag{11}$$

(9) 式、(11) 式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x^3}\tag{12}$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}2x^3=0$，$\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{2x^3}$属于$\dfrac{0}{0}$型的函数极限计算题，可以对其使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x^2}\tag{13}$$

(12)式、(13)式相结合,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x^2} \tag{14}$$

根据等价无穷小替换,可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2} \tag{15}$$

(14)式、(15)式相结合,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2} \tag{16}$$

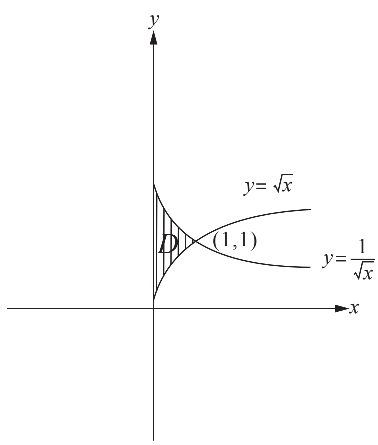
(16)式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\frac{1}{12} \tag{17}$$

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D e^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$,$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域。

解:本题是计算二重积分$\iint\limits_D e^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,首先要在平面直角坐标系中画出以曲线 $y=\sqrt{x}$,$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域 D,如下图所示。



大家注意,这个积分区域 D 是一个不封闭的区域。

接着将二重积分$\iint\limits_D e^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为"先 y 后 x 型(也就是先对 y 积分,后对 x 积分)"的形式,即

$$\iint_D e^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xy\mathrm{d}y \tag{1}$$

先来计算$\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xy\mathrm{d}y$。通过计算可知(由于是对 y 积分，所以被积函数中的 $e^x x$ 就相当于常数)：

$$\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xy\mathrm{d}y = \frac{1}{2}xe^x\left(\frac{1}{x} - x\right) \tag{2}$$

(1) 式、(2) 式相结合，得

$$\iint_D e^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}xe^x\left(\frac{1}{x} - x\right)\mathrm{d}x \tag{3}$$

$\int_0^1 \frac{1}{2}xe^x\left(\frac{1}{x} - x\right)\mathrm{d}x$ 可以写为

$$\int_0^1 \frac{1}{2}xe^x\left(\frac{1}{x} - x\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}e^x\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2e^x\mathrm{d}x \tag{4}$$

(3) 式、(4) 式相结合，得

$$\iint_D e^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}e^x\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2e^x\mathrm{d}x \tag{5}$$

通过直接套公式计算可知$\int_0^1 \frac{1}{2}e^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e-1)$，通过分部积分法计算可知$\int_0^1 \frac{1}{2}x^2e^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e - 1$。把计算出的$\int_0^1 \frac{1}{2}e^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e-1)$、$\int_0^1 \frac{1}{2}x^2e^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e - 1$ 代入(5) 式中，得

$$\iint_D e^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2}e + 1 = \frac{1}{2} \tag{6}$$

(17)(本题满分 10 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10000(万元)。设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x(件) 和 y(件)，且这两种产品的边际成本分别为 $20 + \frac{x}{2}$(万元／件) 与 $6 + y$(万元／件)。

(Ⅰ) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$(万元)；

(Ⅱ) 当总产量为 50 件时，甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小?求最小成本；

(Ⅲ) 当总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义。

解：与经济有关的题几乎每年数学三都会考一道，现在我告诉大家六句话，大家以后就用这六句话来解这类题。

第一句话：大家一定要知道收益 $R = PQ$；一定要知道利润 $I = PQ - C$(C 为成本)。

第二句话：大家一定要知道$\frac{EQ}{EP}=\frac{P}{Q}\times\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$或$\frac{EQ}{EP}=-\frac{P}{Q}\times\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$。具体来说，当需求弹性大于0时，取负；当需求弹性小于0时，取正。

第三句话：大家一定要知道收益对价格的弹性公式$\frac{ER}{EP}=\frac{P}{R}\times\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$，一定要知道收益对需求的弹性公式$\frac{ER}{EQ}=\frac{Q}{R}\times\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$。

第四句话：大家一定要知道$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$，$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=P+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}$。

第五句话：大家一定要知道当边际收益等于边际成本时，利润最大化。

第六句话：大家一定要知道边际成本的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q}$；一定要知道边际收益的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$；一定要知道边际利润的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}Q}$。

下面来看本题，先看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问是求总成本函数$C(x,y)$。所谓总成本，应等于甲产品的成本加上乙产品的成本。

设甲产品的成本为$C_1(x)$，乙产品的成本为$C_2(y)$。由上述第六句话可知边际成本$=\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q}$(在本题中，数量$Q$就是指$x$和$y$)。这两种产品的边际成本分别为$20+\frac{x}{2}$(万元/件)与$6+y$(万元/件)。所以有

$$\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}x}=20+\frac{x}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}y}=6+y$$

所以$C_1(x)-C_1(0)=\int_0^x 20+\frac{x}{2}\mathrm{d}x$，解得$C_1(x)=C_1(0)+20x+\frac{1}{4}x^2$。

$C_2(y)-C_2(0)=\int_0^y 6+y\mathrm{d}y$，解得$C_2(y)=C_2(0)+6y+\frac{1}{2}x^2$。

总成本函数$C(x,y)$为

$$C(x,y)=C_1(x)+C_2(y)=C_1(0)+20x+\frac{1}{4}x^2+C_2(0)+6y+\frac{1}{2}x^2$$

由题意，有$C_1(0)+C_2(0)=10000$(因为10000是固定成本，即便生产数量为0也会有成本)。把$C_1(0)+C_2(0)=10000$代入上式中，得

$$C(x,y)=C_1(x)+C_2(y)=20x+\frac{1}{4}x^2+6y+\frac{1}{2}x^2+10000\text{(万元)}$$

再来看第(Ⅱ)问。

总产量为 50，即 $x+y=50$。我们可以将第（Ⅱ）问转换成“求在 $x+y=50$ 的条件下，函数 $C(x,y)=20x+\frac{1}{4}x^2+6y+\frac{1}{2}x^2+10000$ 的最小值”。这样，第（Ⅱ）问就成了求条件极值问题。

令 $F(x,y,\lambda)=20x+\frac{1}{4}x^2+6y+\frac{1}{2}x^2+10000+\lambda(x+y-50)$

通过计算可知

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{2}x+20+\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=y+6+\lambda$$

令 $\frac{\partial F}{\partial x}=0$，$\frac{\partial F}{\partial y}=0$，就有 $\frac{1}{2}x+20+\lambda=0$，$y+6+\lambda=0$。再结合 $x+y=50$，就构成了如下方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+20+\lambda=0\\ y+6+\lambda=0\\ x+y=50\end{cases}$$

解此方程组得：$x=24$，$y=26$。

这里求出的只是“最小值点”，接下来求“最小值”。最小值为 $C(24,26)=11118$（万元）。

最后来看第（Ⅲ）问。

第（Ⅲ）问的前提是“当总产量为 50 件且总成本最小”，这就意味着 $x=24$。要求甲产品的边际成本，已知甲产品的边际成本函数为 $20+\frac{x}{2}$，所以当 $x=24$ 时甲产品的边际成本为

$$\left(20+\frac{x}{2}\right)\bigg|_{x=24}=32（万元／件）$$

（18）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$。

解：很明显，本题属于“证明不等式”的题型。在正式讲解本题之前，先来给大家总结一下证明不等式的方法。

先来看方法 1。

方法 1 适用于要证明的不等式的形式是 □ < □ < □ 并且这三个方框全是常数。

方法 1 具体步骤如下。

第一步：设一个辅助函数 $f(x)$，怎么设呢？就是把三个方框中的中间的那个方框里面的常数变成 x 即可。

第二步：把要证明的不等式改写为 □ < □ - 0 < □。

第三步：找到使得 $f(a)=0$ 的 a，把 □ < □ - 0 < □ 再改写为 □ < □ - $f(a)$ < □。

第四步：在区间[a,中间方框中的常数]上使用拉格朗日中值定理即可得证。

再来看方法2。

方法2适用于要证明的不等式的形式是 $\frac{f(x)}{g(x)}>$ 某常数或 $\frac{f(x)}{g(x)}<$ 某常数。

方法2具体步骤如下。

第一步：找出使得 $f(a)=0$ 和 $g(a)=0$ 的常数 a，然后把要证明的不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}>$ 某常数改写为 $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}>$ 某常数(或把不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}<$ 某常数改写为 $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$(某常数)。

第二步：在区间 $[a,x]$ 上对函数 $f(x)$、$g(x)$ 使用柯西中值定理即可得证。

再来看方法3。

方法3是考研中最常用到的"证明不等式"的方法。

方法3适用于要证明的不等式的形式是 □ < △(或 □ > △ 或 □ ≤ △ 或 □ ≥ △)，并且 □ 和 △ 都不是常数。

方法3具体步骤如下。

第一步：设辅助函数 $F(x)=$ □ - △ 或 $F(x)=$ △ - □(这两个辅助函数都可以)。

第二步：对辅助函数 $F(x)$ 求导、求导、再求导……求到几阶导为止呢？如果遇到以下两种情况之一，就不用再求导了。

情况1：求到某阶导函数后，在所给的区间上该导函数恒正或恒负。

情况2：求到某阶导函数后，可以在所给的区间上找到一个点，在(题中所给的区间的左端点，该点)上该导函数恒正(或恒负)，在(该点，题中所给的区间的右端点)上该导函数恒负(或恒正)。

第三步：一阶一阶往回推，要通过高阶导函数的正负推出低阶导函数的增减性，再通过端点的函数值或者第二步中找到的那个点的函数值推出低阶导函数的正负……就这样一阶一阶往回推，直到推出 $F(x)>0$ 或 $F(x)<0$ 为止。

再来看方法4。

方法4适用于要证明的不等式的形式是 □ < □ < □，并且最左侧的 □ 和最右侧的 □ 都是常数而中间的方框是函数。

方法4具体步骤如下。

只要按之前所讲的求最值的方法求出中间那个函数的最小值是左边的方框、最大值是

右边的方框就可以了。

最后来看方法5。

方法5适用于要证明的不等式的形式是□ < △或□ < △，并且□和△都是常数，当我们设一个辅助函数 $f(x)$ 后要证明的不等式可表示为 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 或 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

方法5具体步骤如下。

如果最终要证的不等式是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那只要算出 $f''(x)>0$ 就可以了。这是因为：$f'(x)>0$ 说明函数图形是凹的，而凹函数的定义是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

如果最终要证明的不等式是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那只要算出 $f''(x)<0$ 就可以了。这是因为：$f''(x)<0$ 说明函数图形是凸的，而凸函数的定义是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

以上总结了证明不等式的五种方法以及适用范围，现在来看本题。

由于本题要证明的不等式的形式是□ ≥ △并且□和△都不是常数，所以明显属于方法3的适用题型。

第一步：设辅助函数。

对于本题而言，由于不等式是 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$，所以设辅助函数为 $F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$。这样，最终只需要证明在区间 $(-1<x<1)$ 上，$F(x)\geq 0$。

第二步：连续求导。

对于本题而言，由于设的辅助函数是 $F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，所以

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \ln\frac{1+x}{1-x}+x(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})-\sin x-x \\
&= \ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\sin x-x
\end{aligned}
$$

此时大家看一下，能够判断出函数 $F'(x)$ 在区间 $(-1<x<1)$ 上的正负吗?明显不能，

所以继续求导。

$$F''(x)=\frac{4}{1-x^2}+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}-1-\cos x$$

此时大家看一下，能够判断出函数 $F''(x)$ 在区间$(-1<x<1)$上的正负吗?能!我们可以判断出在区间$(-1<x<1)$上，$F''(x)>0$。所以就求到二阶导为止。

第三步：一阶一阶往回推(利用高阶的正负性推低阶的增减性)。

对于本题而言，由于在区间$(-1<x<1)$上 $F''(x)>0$，所以在区间$(-1<x<1)$上 $F'(x)$ 单调递增。

由于 $F'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\sin x-x$，所以 $F'(0)=0$。而在区间$(-1<x<1)$上 $F'(x)$ 单调递增，所以在区间$(-1,0)$上 $F'(x)<0$；在区间$(0,1)$上 $F'(x)>0$。下面分两段来讨论。

第一段：x 在区间$(-1,0)$上时。

当 x 在区间$(-1,0)$上时，由于 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 单调递减。由于 $F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，所以 $F(0)=0$。由此可知，在区间$(-1,0)$上，$F(x)>0$。

第二段：x 在区间$(0,1)$上时。

当 x 在区间$(0,1)$上时，由于 $F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 单调递增。由于 $F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，所以 $F(0)=0$。由此可知，在区间$(0,1)$上，$F(x)>0$。

综上所述，在区间$(-1,0)$和$(0,1)$上都有 $F(x)>0$。又由于 $F(0)=0$，所以在区间$(-1<x<1)$上，$F(x)\geqslant 0$。本题证明完毕。

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$。

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的表达式。

(Ⅱ)求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt$ 的拐点。

解：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

函数 $f(x)$ 满足两个方程：$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$，以及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，要求函数 $f(x)$。

此时大家的解题思路应该很清晰，就是：先求出二阶常系数齐次线性微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解，求出的通解中肯定含有两个任意常数 C_1 和 C_2(因为 $f''(x)+f'(x)-$

$2f(x)=0$ 是二阶微分方程，所以它的通解中肯定含有两个任意常数)，然后再利用 $f''(x)+f(x)=2e^x$ 把两个任意常数给确定下来就可以了。

知道了解题思路后，开始正式做。

首先求二阶常系数齐次线性微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解。先来复习一下求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法。

设 $Ay''+By'+Cy=0$ 是一个二阶常系数齐次线性微分方程

第一步：先把 y'' 的系数变为 1，即变为 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$，记 $p=\frac{B}{A}$，$q=\frac{C}{A}$。

第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

第三步：写出通解。

情况 1：若第二步解出的 r_1、r_2 为实根并且 $r_1\neq r_2$，则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$。

情况 2：. 若第二步解出的 r_1、r_2 为实根并且 $r_1=r_2$，则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$。

情况 3：若第二步解出的 r_1、r_2 为复数根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，则通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$。

现在来求二阶常系数齐次线性微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解。

第一步：先把 y'' 的系数变为 1，即变为 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$，记 $p=\frac{B}{A}$，$q=\frac{C}{A}$。

对于 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 而言，已经是 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$ 的形式了，所以不用再变了。其中 $p=1$，$q=-2$。

第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

对于 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 而言，相应的特征方程是 $r^2+r-2=0$。

解得 $r_1=1$，$r_2=-2$。

第三步：写出通解。

情况 1：若第二步解出的 r_1、r_2 为实根并且 $r_1\neq r_2$，则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$。

情况 2：若第二步解出的 r_1、r_2 为实根并且 $r_1=r_2$，则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$。

情况 3：若第二步解出的 r_1、r_2 为复数根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，则通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$。

由于 $r_1=1$，$r_2=-2$，属于情况 1，所以 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$。

接下来要通过方程 $f''(x)+f(x)=2e^x$ 来确定 C_1 和 C_2，具体确定方法如下：

由于 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$，所以

$f'(x)=C_1e^x-2C_2e^{-2x}$

$f''(x)=C_1e^x+4C_2e^{-2x}$

代入$f''(x)+f(x)$中，得$f''(x)+f(x)=2C_1e^x+5C_2e^{-2x}$，而已知$f''(x)+f(x)=2e^x$，这两个式子一对比，可得$2C_1e^x+5C_2e^{-2x}=2e^x$。

解得$C_1=1$，$C_2=0$。

所以$f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}=e^x$

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问求的是曲线$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt$的拐点。先来给大家总结一下求某函数的拐点的步骤。

第一步：写出该函数的定义域。

第二步：求两种点，第一种是二阶导数为0的点，第二种是二阶导没有定义的点。

第三步：用刚才求出的二阶导数为0的点和二阶导没有定义的点划分定义域。

第四步：每个区间内任取一个点(取点的原则是方便计算)，然后把取的点代入二阶导函数中，根据二阶导函数大于0还是小于0确定凹凸性。

第五步：拐点肯定是取自二阶导数为0的点或者二阶导没有定义的点。看看每个二阶导数为0的点和二阶导没有定义的点的两侧的区域的凹凸性。"左凹右凸"或"左凸右凹"就是拐点，"同凹同凸"则不是拐点。

第六步：刚才算出的其实是拐点的横坐标，现在则要把拐点的横坐标代入函数$f(x)$中，计算出拐点。

下面就按照这六步来做。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题而言，函数$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt$的定义域是$(-\infty,+\infty)$。

第二步：求两种点，第一种点是二阶导数为0的点，第二种点是二阶导没有定义的点。

先来求二阶导数为0的点。这需要先求二阶导数。由于$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt$，所以$y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1$，$y''=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x$。然后令二阶导数为0，即

$$2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x=0$$

解得$x=0$。

所以二阶导数为0的点只有一个，就是$x=0$。

再来求二阶导没有定义的点。

二阶导数是$y''=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x$，在刚刚第一步求得的定义域$(-\infty,+\infty)$上$y''$存在没有定义的点吗?很明显不存在!

第三步：用刚才求出的二阶导数为0的点和二阶导没有定义的点划分定义域。

对于本题而言，第二步求出的二阶导数为0的点和二阶导没有定义的点总共只有一个，所以用这一个点 $x=0$ 划分定义域 $(-\infty,+\infty)$。可以划分为两个区域 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$。

第四步：每个区间内任取一个点(取点的原则是方便计算)，然后把取的那个点代入二阶导函数中，根据二阶导函数大于0还是小于0确定凹凸性。

在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 内任取一个点代入二阶导函数 $y''=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x$ 中，发现小于0，所以函数 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是凸的。

在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个点代入二阶导函数 $y''=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x$ 中，发现大于0，所以函数 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的。

第五步：拐点肯定是取自二阶导数为0的点或者二阶导没有定义的点。看一下每个二阶导数为0的点和二阶导没有定义的点的两侧的区域的凹凸性。“左凹右凸”或“左凸右凹”就是拐点，“同凹同凸”则不是拐点。

来看 $x=0$ 这个点。第四步已经判断出它左侧的区间 $(-\infty,0)$ 是凸的，右侧的区间 $(0,+\infty)$ 是凹的，$x=0$ 这个点属于“左凸右凹”，所以 $x=0$ 是一个拐点(横坐标)。

第六步：刚才算出的其实是拐点的横坐标，现在要把拐点的横坐标代入函数 $f(x)$ 中，计算出拐点。

对于本题而言，就是把 $x=0$ 代入 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 中，解得 $y(0)=0$。

所以点 $(0,0)$ 是函数 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 的拐点。

(20)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$。

（Ⅰ）计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

（Ⅱ）当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 有无穷多解，并求其通解。

解：本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

第（Ⅰ）问是计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$，也就是计算行列式 $\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}$。我们采用降阶法(按

行列展开法)来计算该行列式,先选取第 1 列来降阶(实际上,选取任意一行或任意一列来进行降阶都是可以的),即

$$\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+0+0+a\times(-1)^{4+1}\times\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}$$

$$=1-a^4$$

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是问当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 有无穷多解,并求其通解。下面先来复习一下克拉默法则的推论,其实就是以下四个充分必要条件:

齐次方程组

① 系数行列式 $D=0\Leftrightarrow$ 该齐次方程组有无穷多组解(非唯一解)(非零解)。

② 系数行列式 $D\neq0\Leftrightarrow$ 该齐次方程组有唯一零解。

非齐次方程组

③ 系数行列式 $D=0\Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有无穷多组解(非唯一解)或无解。

④ 系数行列式 $D\neq0\Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有唯一解。

根据以上四个充分必要条件中的③可知:当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时,非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 有无穷多组解(非唯一解)或无解。

而第(Ⅰ)问已经算出了 $|\boldsymbol{A}|=1-a^4$,所以当 $1-a^4=0$ 即 $a=\pm1$ 时,非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 有无穷多组解(非唯一解)或无解。

那么 $a=\pm1$ 就是本题的答案吗?当然不是。因为本题说的是"有无穷多组解",而 $a=\pm1$ 时方程组有无穷多组解或无解。所以接下来,应该验证一下 $a=-1$、$a=1$ 这两者中究竟哪个对应的是无解,哪个对应的是有无穷多组解。

当 $a=1$ 时:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix},\quad \vec{\boldsymbol{\beta}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},$$ 则矩阵 $(\boldsymbol{A}\mid\vec{\boldsymbol{\beta}})=$

$\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$，将矩阵$(\boldsymbol{A}\mid\vec{\boldsymbol{\beta}})=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$采用初等行变换化为阶梯形矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$，由此可知$r(\boldsymbol{A})=3$，$r(\boldsymbol{A}\mid\vec{\boldsymbol{\beta}})=4$，由于这两个秩不相等，所以非齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$无解。即当$a=1$时，非齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$无解。

当$a=-1$时：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{\beta}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$，则矩阵$(\boldsymbol{A}\mid\vec{\boldsymbol{\beta}})=$

$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}$，将矩阵$(\boldsymbol{A}\mid\vec{\boldsymbol{\beta}})=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}$采用初等行变换化为阶梯形矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，由此可知$r(\boldsymbol{A})=3$，$r(\boldsymbol{A}\mid\vec{\boldsymbol{\beta}})=3$，由于这两个秩相等，所以非齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$有解。加之$r<n$，所以非齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$有无穷多组解。即当$a=-1$时，非齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$有无穷多组解。

本题做到这里还没有做完，因为本题不但让我们判断当实数a为何值时，方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$有无穷多解，还让我们求其通解。所以来求一下通解。

先复习一下求非齐次方程组通解的步骤：

(1) 写出方程组对应的矩阵并求两个秩r_1、r_2。

(2) 判断解的类型。具体的判断方法如下：

① 若$r_1\neq r_2$，则该非齐次方程组无解。

② 若$r_1=r_2$且$r_1=r_2=n$(未知数个数)，则该非齐次方程组有唯一的解，不用再进行步骤(3)。

③ 若 $r_1 = r_2$ 且 $r_1 = r_2 < n$(未知数个数)，则该非齐次方程组有无穷多解，需要进行步骤(3)。

(3) 先当成对应的齐次方程组，按齐次方程组的步骤(3)求出齐次方程组的通解。然后再还原成非齐次方程组，令自由未知数取全零，求出非齐次方程组的一个特解。最后，用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解，得到的就是非齐次方程组的通解。

按照这三个步骤就可以求出在 $a=-1$ 的条件下，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 的通解。第(Ⅱ)问的答案是：在 $a=-1$ 的条件下，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 的通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数。

(21)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \vec{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\vec{\boldsymbol{x}}$ 的秩为 2。

(Ⅰ) 求实数 a 的值；

(Ⅱ) 求正交变换 $\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{y}}$ 将 f 化为标准形。

解： 先来看第(Ⅰ)问。

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \vec{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\vec{\boldsymbol{x}}$ 的秩为 2。所谓二次型的秩，指的是二次型的对应矩阵的秩。本题中二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \vec{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\vec{\boldsymbol{x}}$ 的秩为 2，这就意味着该二次型的对应矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，即 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = 2$。

而我们知道，$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A})$，所以 $r(\boldsymbol{A}) = 2$。

矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，由 $r(\boldsymbol{A}) = 2$ 可以知道 $a+1=0$，解得 $a=-1$。

再来看第（Ⅱ）问。

第（Ⅱ）问是将二次型化为标准形。将二次型化为标准形有两种方法：一是正交变换法，二是配方法。不过本题指定了用正交变换法。

既然如此，就用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\vec{\boldsymbol{x}}$ 为标准形。

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\vec{\boldsymbol{x}}$ 的对应矩阵为：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$。

先求矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值。

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}$$

令 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$

即 $\begin{vmatrix}2-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}=0$

解得：$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$。

再求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个不同特征值所对应的特征向量。

当 $\lambda_1=0$ 时：

齐次方程组 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 变为 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\boldsymbol{0}}$。解出方程组 $(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 的通解即可，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

最终解得特征值 0 对应的特征向量为 $C_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，其中 C_1 是不为 0 的任意常数。

当 $\lambda_2=2$ 时：

齐次方程组$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\mathbf{0}}$变为$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\mathbf{0}}$。解出方程组$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\mathbf{0}}$的通解即可，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

还是直接给出最终结果。

特征值 2 对应的特征向量为 $C_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 C_2 是不为零的任意常数。

当 $\lambda_3=6$ 时：

齐次方程组$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\mathbf{0}}$变为$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\mathbf{0}}$。解出方程组$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{\xi}}=\vec{\mathbf{0}}$的通解即可，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

最终结果如下。

特征值 6 对应的特征向量为 $C_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，其中 C_3 是不为零的任意常数。

现在这三个特征值所对应的特征向量已经都算完了。记$\vec{\boldsymbol{a}}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{a}}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{a}}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，现在需要将$\vec{\boldsymbol{a}}_1,\vec{\boldsymbol{a}}_2,\vec{\boldsymbol{a}}_3$单位正交化。所谓“单位正交化”指的是：先正交化，后单位化。

正交化过程如下。

由于矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$是实对称矩阵，而实对称矩阵的来自不同特征值的特征向量本来就是正交的，所以“正交化”这个环节就不用进行了。

单位化过程如下。

$$\vec{\boldsymbol{b}}_1=\frac{\vec{\boldsymbol{a}}_1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2=\frac{\vec{a}_2}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_3=\frac{\vec{a}_3}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 即为单位化后所得的向量。

设 $\boldsymbol{Q}=(\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3})=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，令 $\vec{x}=\boldsymbol{Q}\vec{y}$，则原二次型所对应的标准形为 $2y_2^2+6y_3^2$。

这道题这样就做完了，我想说的是：要是只想求出原二次型化成的标准形，那太容易了，当求出矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的三个特征值是 0、2、6 之后，立刻就知道原二次型化成的标准形了。然而，这道题并不是“只要写出标准形就行了”，而是“求出矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得：若令 $\vec{x}=\boldsymbol{Q}\vec{y}$，则原二次型能变为标准形”。大家明白了吧。

(22)（本题满分 11 分）

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求 $P\{X=2Y\}$；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$。

解：本题有两问，先看第（Ⅰ）问。

第（Ⅰ）问求的是概率 $P\{X=2Y\}$。从题目所给的分布律中可以看出来，$X=2Y$ 包含了两种情况：第一种情况是“$X=0,Y=0$”；第二种情况是“$X=2,Y=1$”。所以

$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}$

由分布律

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

可知 $P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=2,Y=1\}=0$，所以

$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

再看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求协方差 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$。

由协方差的性质，得

$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y) \tag{1}$$

而

$$\mathrm{Cov}(Y,Y)=D(Y) \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-D(Y) \tag{3}$$

而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y) \tag{4}$$

(3)式、(4)式相结合，得

$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)-D(Y) \tag{5}$$

根据(5)式可以知道，要想计算出 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$，需要算出四项：$E(XY)$、$E(X)$、$E(Y)$、$D(Y)$。下面就来分别算这四项。

先计算 $E(XY)$。

为方便表示，设 $Z=XY$，则需要算的是 $E(Z)$。首先要知道随机变量 Z 的分布律。由于 $Z=XY$，而 X 可以取 0、1、2，Y 也可以取 0、1、2，所以很明显 Z 可以取 0、1、4。而且

$$\begin{aligned}
&P(Z=0)\\
&=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=0)+P(X\\
&=2,Y=0)\\
&=\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{12}\\
&=\frac{7}{12}
\end{aligned}$$

$P(Z=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$

$P(Z=4)=P(X=2,Y=2)=\frac{1}{12}$

所以随机变量 Z 的分布律为

Z	0	1	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

$E(XY)=E(Z)=0\times\frac{7}{12}+1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$。

再来算 $E(X)$。

要想计算 $E(X)$，就得知道随机变量 X 的分布律。由于二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

所以随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$。

再来算 $E(Y)$。

要想算 $E(Y)$，就得知道随机变量 Y 的分布律。由于二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

所以随机变量 Y 的分布律为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(Y)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1$。

再来算 $D(Y)$`。

利用公式 $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$ 来算 $D(Y)$。$E(Y)$ 已经算出来了，$E(Y)=1$。现在算一下 $E(Y^2)$。由于随机变量 Y 的分布律为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

所以 $E(Y^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$。

由于 $E(Y^2)=\frac{5}{3}$，$E(Y)=1$，所以 $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$。

现在已经算出了 $E(XY)=\frac{2}{3}$，$E(X)=\frac{2}{3}$，$E(Y)=1$，$D(Y)=\frac{2}{3}$。代入(5)式，得

$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 1-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3} \tag{6}$$

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$。

(Ⅰ)求 V 的概率密度 $f_V(v)$；

(Ⅱ)求 $E(U+V)$。

解：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

由于随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，所以随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, x\geqslant 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

由于随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，所以随机变量 Y 的分布函数为

$$G(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, y\geqslant 0\\ 0, y<0\end{cases}$$

先来求随机变量 V 的分布函数 $F_V(v)$。

根据分布函数的定义，有

$$F_V(v) = P(V \leqslant v) \tag{1}$$

由于 $V = \min\{X,Y\}$，所以(1) 式可以变为

$$F_V(v) = P(\min\{X,Y\} \leqslant v) \tag{2}$$

(2) 式可以转化为

$$F_V(v) = 1 - P(\min\{X,Y\} > v) \tag{3}$$

随机变量 X 和 Y 都大于 v，所以(3) 式可以变为

$$F_V(v) = 1 - P(X > v, Y > v) \tag{4}$$

由于随机变量 X 与 Y 相互独立，所以(4) 式可以变为

$$F_V(v) = 1 - P(X > v)P(Y > v) \tag{5}$$

由于 $P(X > v) = 1 - P(X \leqslant v)$，$P(Y > v) = 1 - P(Y \leqslant v)$，所以(5) 式可以变为

$$F_V(v) = 1 - [1 - P(X \leqslant v)] \times [1 - P(X \leqslant v)] \tag{6}$$

根据分布函数的定义式可知 $P(X \leqslant v) = F(v)$，$P(Y \leqslant v) = G(v)$，所以(6) 式可以变为

$$F_V(v) = 1 - [1 - F(v)] \times [1 - G(v)] \tag{7}$$

由于 $F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x}, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$，$G(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-y}, y \geqslant 0 \\ 0, y < 0 \end{cases}$，所以(7) 式计算结果为

$$F_V(v) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-2v}, v \geqslant 0 \\ 0, v < 0 \end{cases} \tag{8}$$

现在已经求出了随机变量 V 的分布函数，而第(Ⅰ) 问求的是随机变量 V 的概率密度函数，现在只需求导即可。即

$$f_V(v) = F'_V(v) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2v}, v > 0 \\ 0, v \leqslant 0 \end{cases} \tag{9}$$

再来看第(Ⅱ) 问。

由于 $U = \max\{X,Y\}$，$V = \min\{X,Y\}$，所以即便不知道 X 和 Y 究竟谁大谁小，但是如下结论一定成立：或者是 $U = X$ 且 $V = Y$，或者是 $U = Y$ 且 $V = X$。

无论是两个“或者”中的哪一个，都有：

$$U + V = X + Y \tag{10}$$

所以

$$E(U + V) = E(X + Y) \tag{11}$$

而 $E(X + Y)$ 可以写为

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \tag{12}$$

(11) 式、(12) 式相结合，得

$$E(U + V) = E(X) + E(Y) \tag{13}$$

已知随机变量 X 与 Y 都服从参数为 1 的指数分布，大家请看下表。

分　布	数学期望	方　差
① 二项分布 $B(n,p)$	np	$np(1-p)$
② 泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
③ 几何分布 $G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
④ 均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
⑤ 指数分布 $E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
⑥ 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
⑦ χ^2 分布 $\chi^2(n)$	n	$2n$
⑧ t 分布 $t(n)$	0	$\frac{n}{n-2}$

根据上表可知 $E(X)=\frac{1}{1}=1$，$E(Y)=\frac{1}{1}=1$。代入(13)式中，得

$$E(U+V)=1+1=2 \tag{14}$$

2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题及精解

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

（1）已知当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　　）。

（A）$k = 1, c = 4$

（B）$k = 1, c = -4$

（C）$k = 3, c = 4$

（D）$k = 3, c = -4$

解： 先来计算一下 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^k}$。

由于 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x - \sin 3x}{x^k} \tag{1}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}x^k = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}(3\sin x - \sin 3x) = 0$，所以可以对 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{x^k}$ 使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x - \sin 3x}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos x - 3\cos 3x}{kx^{k-1}} \tag{2}$$

（1）式可以整理为

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x - \sin 3x}{x^k} = \frac{3}{k}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 3x}{x^{k-1}} \tag{3}$$

将(1) 式、(3) 式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = \frac{3}{k}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 3x}{x^{k-1}} \tag{4}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}x^{k-1} = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x - \cos 3x) = 0$，所以可以对 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^{k-1}}$ 使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^{k-1}}=\frac{1}{k-1}\lim_{x\to0}\frac{3\sin 3x-\sin x}{x^{k-2}} \tag{5}$$

将(1)式、(5)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^k}=\frac{3}{k(k-1)}\lim_{x\to0}\frac{3\sin 3x-\sin x}{x^{k-2}} \tag{6}$$

由于$\lim\limits_{x\to0}x^{k-2}=0$，$\lim\limits_{x\to0}(3\sin 3x-\sin x)=0$，所以可以对$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin 3x-\sin x}{x^{k-2}}$使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin 3x-\sin x}{x^{k-2}}=\frac{1}{k-2}\lim_{x\to0}\frac{9\cos 3x-\cos x}{x^{k-3}} \tag{7}$$

(6)式、(7)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^k}=\frac{3}{k(k-1)(k-2)}\lim_{x\to0}\frac{9\cos 3x-\cos x}{x^{k-3}} \tag{8}$$

由(8)式可知

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=\frac{3}{3(3-1)(3-2)}\lim_{x\to0}\frac{9\cos 3x-\cos x}{x^{3-3}}=4 \tag{9}$$

在该式的等号左右两侧同时乘以$\dfrac{1}{4}$得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{4x^3}=1 \tag{10}$$

已知“当$x\to0$时，函数$f(x)=3\sin x-\sin 3x$与cx^k是等价无穷小”，即

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{cx^k}=1 \tag{11}$$

对比(10)式、(11)式可知$k=3$、$c=4$，所以本题应该选择(C)选项。

(2) 设函数$f(x)$在$x=0$处可导，且$f(0)=0$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$(　　)。

(A) $-2f'(0)$

(B) $-f'(0)$

(C) $f'(0)$

(D) 0

解：函数$f(x)$在$x=0$处可导，这就说明$f'(0)$存在。现在写出函数$f(x)$在$x=0$处可导的定义式，即$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$。由于$f(0)=0$，所以这个式子可以化简为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0) \tag{1}$$

下面再来计算一下$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^3)}{x^3}$。

令 $t=x^3$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^3)}{x^3}$ 可以变为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x^3)}{x^3}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t} \tag{2}$$

由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$，所以必然有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(t)}{t}=f'(0) \tag{3}$$

将(1)式、(3)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x^3)}{x^3}=f'(0) \tag{4}$$

本题的问题$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}$很明显可以写为

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to0}\frac{f(x^3)}{x^3} \tag{5}$$

把(1)式、(4)式代入(5)式，得

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=f'(0)-2f'(0) \tag{6}$$

(12)式可以化简为

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=-f'(0) \tag{7}$$

所以本题应该选择(B)选项。

(3) 设$\{u_n\}$是数列，则下列命题正确的是(　　)。

(A) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛

(B) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

(C) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛

(D) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

解：先把级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$都展开。

级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$展开后是$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots$级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$展开后是$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n}) = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \cdots + (u_{n-1} + u_n) + \cdots$

很容易发现这样一件事：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$是级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$经过加括号所构成的。

下面给大家讲一个知识点：如果某常数项级数收敛，那么对于这个级数的项任意加括号所形成的新的级数仍然收敛。

由刚刚讲完的知识点，可以知道本题应该选择(A)选项。

(4) 设$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$，$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$，$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$，则$I$、$J$、$K$的大小关系为(　　)。

(A) $I < J < K$

(B) $I < K < J$

(C) $J < I < K$

(D) $K < J < I$

解：本题所给的三个积分的上、下限都是一样的(下限都是0，上限都是$\frac{\pi}{4}$)，所以我们只需比较被积函数的大小，被积函数的大小顺序就是积分值的大小顺序。

我们知道对数函数$y = \ln x$在其定义域$(0, +\infty)$内是单调递增的，也就是说，x越大，$\ln x$就越大。

有一个常识大家必须知道：当$x \in (0, \frac{\pi}{4})$时，$\sin x < \cos x < \cot x$。

由此可知，有如下不等式成立：

$\ln\sin x < \ln\cos x < \ln\cot x$

这样，被积函数的大小顺序就比较完了，$\ln\sin x < \ln\cos x < \ln\cot x$，所以这三个积分值的大小顺序是$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$，即$I < K < J$。本题选择(B)选项。

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵。记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$（　　）。

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$

(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$

(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$

(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

解：先写出单位矩阵 $\boldsymbol{E}$。

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵。所以现在只要把单位矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的第 2 行与第 3 行交换，就得到了 $\boldsymbol{B}$，所以

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

已知将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，所以只要将矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 的第 1 列减去第 2 列，就得到了 $\boldsymbol{A}$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-0&0&0\\0-0&0&1\\0-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

现在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 已经求出来了，下面就来验证一下(A)、(B)、(C)、(D) 四个选项到底哪个正确就可以了。

需要注意的是，(B) 选项和(D) 选项中出现了符号“-1”，也就是求逆矩阵。我想提醒大家的是，由于矩阵 $\boldsymbol{P}_1$、矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 都是初等矩阵(单位矩阵只经过一次初等变换后所形成的矩阵)，所以在求矩阵 $\boldsymbol{P}_1$、矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 的逆矩阵时，直接按照初等矩阵的逆矩阵求法来求就可以了，而不用按照一个常规矩阵求逆矩阵的方法来求，这样可以使得计算变得简单一些。

计算过程这里就省略了，本题选择(D) 选项。

(6) 设$\boldsymbol{A}$为4×3矩阵，$\vec{\boldsymbol{\eta}}_1,\vec{\boldsymbol{\eta}}_2,\vec{\boldsymbol{\eta}}_3$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$的3个线性无关的解，$k_1,k_2$为任意常数，则$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$的通解为(　　)。

(A) $\dfrac{\vec{\boldsymbol{\eta}}_2+\vec{\boldsymbol{\eta}}_3}{2}+k_1(\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)$

(B) $\dfrac{\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_3}{2}+k_1(\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)$

(C) $\dfrac{\vec{\boldsymbol{\eta}}_2+\vec{\boldsymbol{\eta}}_3}{2}+k_1(\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)+k_2(\vec{\boldsymbol{\eta}}_3-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)$

(D) $\dfrac{\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_3}{2}+k_1(\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)+k_2(\vec{\boldsymbol{\eta}}_3-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)$

解：已知$\vec{\boldsymbol{\eta}}_1,\vec{\boldsymbol{\eta}}_2,\vec{\boldsymbol{\eta}}_3$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$的3个线性无关的解。我们知道，非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$的两个解之差肯定是该非齐次线性方程组所对应的齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$的解。所以对于本题而言，有：$\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$、$\vec{\boldsymbol{\eta}}_3-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$为齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$的解。

现在来看一下$\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$、$\vec{\boldsymbol{\eta}}_3-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$这两个向量到底是线性相关的还是线性无关的。

关注以下式子：

$$k_1(\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)+k_2(\vec{\boldsymbol{\eta}}_3-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)=\vec{\boldsymbol{0}} \tag{1}$$

(1) 式可以整理为

$$(-k_1-k_2)\vec{\boldsymbol{\eta}}_1+k_1\vec{\boldsymbol{\eta}}_2+k_2\vec{\boldsymbol{\eta}}_3=\vec{\boldsymbol{0}} \tag{2}$$

由于$\vec{\boldsymbol{\eta}}_1,\vec{\boldsymbol{\eta}}_2,\vec{\boldsymbol{\eta}}_3$线性无关，所以只有当$-k_1-k_2=0$、$k_1=0$、$k_2=0$时，(2) 式才成立。

现在求解以下方程组：

$$\begin{cases}-k_1-k_2=0\\ k_1=0\\ k_2=0\end{cases}$$

解得$k_1=0$，$k_2=0$。

由于$k_1=0$，$k_2=0$，结合(1) 式可知$\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$、$\vec{\boldsymbol{\eta}}_3-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$这两个向量是线性无关的。

现在既判断出了$\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$、$\vec{\boldsymbol{\eta}}_3-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$为齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$的解，又判断出了$\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$、$\vec{\boldsymbol{\eta}}_3-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$这两个向量是线性无关的，这就说明$\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$、$\vec{\boldsymbol{\eta}}_3-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1$为齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$的两个线

性无关的解。这就说明 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数为 3，所以 $n=3$，$3-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，解得 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$。显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可能是零矩阵，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$。

由于 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$ 且 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，所以 $r(\boldsymbol{A})=1$，$n-r(\boldsymbol{A})=3-1=2$。这就说明非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 所对应的齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 的基础解系中包含两个向量。所以非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 所对应的齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 的通解可以表示为 $k_1(\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)+k_2(\vec{\boldsymbol{\eta}}_3-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)$。

现在来关注一下本题所给的四个选项，先就可以把(A) 选项和(B) 选项排除掉(因为按照(A) 选项和(B) 选项的说法，齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 的基础解系中只包含一个向量)，在(C) 选项和(D) 选项中选择答案。

现在就需要验证一下 $\dfrac{\vec{\boldsymbol{\eta}}_2+\vec{\boldsymbol{\eta}}_3}{2}$ 和 $\dfrac{\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_3}{2}$ 这两者中到底哪一个是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 的解。

先来看(C) 选项。

$$\boldsymbol{A}\times\frac{\vec{\boldsymbol{\eta}}_2+\vec{\boldsymbol{\eta}}_3}{2}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\eta}}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\eta}}_3 \tag{3}$$

由于 $\vec{\boldsymbol{\eta}}_1,\vec{\boldsymbol{\eta}}_2,\vec{\boldsymbol{\eta}}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 的解，所以有

$$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\eta}}_2=\vec{\boldsymbol{\beta}} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\eta}}_3=\vec{\boldsymbol{\beta}} \tag{5}$$

把(4) 式、(5) 式代入(3) 式得

$$\boldsymbol{A}\times\frac{\vec{\boldsymbol{\eta}}_2+\vec{\boldsymbol{\eta}}_3}{2}=\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\beta}}+\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\beta}}=\vec{\boldsymbol{\beta}} \tag{6}$$

由(6) 式可知 $\dfrac{\vec{\boldsymbol{\eta}}_2+\vec{\boldsymbol{\eta}}_3}{2}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 的解。所以(D) 选项就不用再验证了，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 的通解为 $\dfrac{\vec{\boldsymbol{\eta}}_2+\vec{\boldsymbol{\eta}}_3}{2}+k_1(\vec{\boldsymbol{\eta}}_2-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)+k_2(\vec{\boldsymbol{\eta}}_3-\vec{\boldsymbol{\eta}}_1)$。本题应该选择(C) 选项。

(7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度函数的是(　　)。

(A) $f_1(x)f_2(x)$

(B) $2f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)$

(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

解：首先，大家要明白：任何两个分布函数相乘后仍是分布函数。针对本题而言，$F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是分布函数，所以 $F_1(x)F_2(x)$ 也必然是分布函数。

已知 $F_1(x)$ 相应的概率密度函数为 $f_1(x)$，而且 $f_1(x)$ 连续，所以有 $F'_1(x)=f_1(x)$。

已知 $F_2(x)$ 相应的概率密度函数为 $f_2(x)$，而且 $f_2(x)$ 连续，所以有 $F'_2(x)=f_2(x)$。

由此可得

$[F_1(x)F_2(x)]'=F'_1(x)F_2(x)+F'_2(x)F_1(x)=f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

所以说 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 必为概率密度函数。

本题选择(D)选项。

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自该总体的简单随机样本，则对于统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，有(　　)。

(A) $ET_1>ET_2,DT_1>DT_2$

(B) $ET_1>ET_2,DT_1<DT_2$

(C) $ET_1<ET_2,DT_1>DT_2$

(D) $ET_1<ET_2,DT_1<DT_2$

解：先来比较一下 ET_1 和 ET_2。

首先计算一下 ET_1。

由于 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，所以

$$ET_1=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i) \tag{1}$$

$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)$ 可以改写为

$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i \tag{2}$$

将(1) 式、(2) 式相结合，得

$$ET_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i \tag{3}$$

把(3) 式的等式右侧中的“$\sum$”展开得

$$\sum_{i=1}^{n} EX_i = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \tag{4}$$

将(3) 式、(4) 式相结合，得

$$ET_1 = \frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \tag{5}$$

(5) 式可以展开为

$$ET_1 = \frac{1}{n}[E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)] \tag{6}$$

由于$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自同一总体的样本，所以它们的数学期望都一样，都等于总体X的数学期望，所以(6) 式可以写为

$$ET_1 = \frac{1}{n}[E(X) + E(X) + \cdots + E(X)] \tag{7}$$

(5) 式可以化简为

$$ET_1 = \frac{1}{n} \times n \times E(X) \tag{8}$$

已知X服从参数为$\lambda(\lambda > 0)$的泊松分布，所以有

$$E(X) = \lambda \tag{9}$$

将(6) 式、(9) 式相结合，得

$$ET_1 = \frac{1}{n} \times n \times \lambda = \lambda \tag{10}$$

再来计算一下ET_2。

由于$T_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n}X_n$，所以

$$ET_2 = E(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n}X_n) \tag{11}$$

$E(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n}X_n)$ 可以化简为

$$E(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n}X_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} EX_i + \frac{1}{n}EX_n \tag{12}$$

将(11) 式、(12) 式相结合，得

$$ET_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} EX_i + \frac{1}{n}EX_n \tag{13}$$

(13) 式可以化简为

$$ET_2 = \frac{1}{n-1} \times (n-1) \times EX + \frac{1}{n}EX \tag{14}$$

把 $E(X) = \lambda$ 代入(14) 式，得

$$ET_2 = \lambda + \frac{\lambda}{n} \tag{15}$$

现在已经计算出了 $ET_1 = \lambda$、$ET_2 = \lambda + \frac{\lambda}{n}$。由于 $n > 0$，$\lambda > 0$，所以$\frac{\lambda}{n} > 0$，$ET_1 < ET_2$。

再来比较一下 DT_1 和 DT_2。

先计算一下 DT_1。

由于 $T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，所以

$$DT_1 = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) \tag{16}$$

$D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$ 可以改写为

$$D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \tag{17}$$

将(16) 式、(17) 式相结合，得

$$DT_1 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \tag{18}$$

把(18) 式的等式右侧中的“$\sum$”展开得

$$\sum_{i=1}^{n} DX_i = D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \tag{19}$$

将(18) 式、(19) 式相结合，得

$$DT_1 = \frac{1}{n^2}D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \tag{20}$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自同一总体的样本，所以它们相互独立、不相关，(20) 式可以展开为

$$DT_1 = \frac{1}{n^2}[D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)] \tag{21}$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自同一总体的样本，所以它们的方差都一样，都等于总体 X 的方差，所以(21) 式可以写为

$$DT_1 = \frac{1}{n^2}[D(X) + D(X) + \cdots + D(X)] \tag{22}$$

(22) 式可以化简为

$$DT_1 = \frac{1}{n^2} \times n \times D(X) \tag{23}$$

已知 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布，所以有

$$D(X) = \lambda \tag{24}$$

将(23) 式、(24) 式相结合，得

$$DT_1 = \frac{1}{n^2} \times n \times \lambda = \frac{\lambda}{n} \tag{25}$$

再来计算一下 DT_2。

由于 $T_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n}X_n$，所以

$$DT_2 = D\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n}X_n\right) \tag{26}$$

$D\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n}X_n\right)$ 可以化简为

$$D\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n}X_n\right) = \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1} DX_i + \frac{1}{n^2}DX_n \tag{27}$$

将(26) 式、(27) 式相结合，得

$$DT_2 = \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1} DX_i + \frac{1}{n^2}DX_n \tag{28}$$

(28) 式可以化简为

$$DT_2 = \frac{1}{(n-1)^2} \times (n-1) \times DX + \frac{1}{n^2} \times DX \tag{29}$$

把 $D(X) = \lambda$ 代入(29) 式，得

$$DT_2 = \frac{\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n^2} \tag{30}$$

现在已经计算出了 $DT_1 = \frac{\lambda}{n}$，$DT_2 = \frac{\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n^2}$。由于 $n \geqslant 2$，$\lambda > 0$，所以很明显 $\frac{\lambda}{n} < \frac{\lambda}{n-1}$，那么 $\frac{\lambda}{n}$ 就更小于 $\frac{\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n^2}$ 了，所以 $DT_1 < DT_2$。

综上所述，有 $ET_1 < ET_2$ 和 $DT_1 < DT_2$，所以本题应该选择(D) 选项。

二、填空题：9 ~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设 $f(x) = \lim\limits_{t \to 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x) = $ ________。

解： 本题分两个步骤来做。第一步是求出 $f(x)$，第二步是计算 $f'(x)$。

现在先来进行第一步，即求出$f(x)$。

由于$f(x)=\lim\limits_{t\to0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，所以只需计算出极限$\lim\limits_{t\to0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$就可以了。需要注意的是：由于是“$t\to$”，所以在计算极限的时候$x$就当成常数。

由于$\lim\limits_{t\to0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\lim\limits_{t\to0}(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，所以只需计算出极限$\lim\limits_{t\to0}(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，然后在前面乘以一个$x$就可以了。

下面开始计算$\lim\limits_{t\to0}(1+3t)^{\frac{x}{t}}$。

由于$\lim\limits_{t\to0}(1+3t)=1$，$\lim\limits_{t\to0}\frac{x}{t}=\infty$，所以本题属于$1^\infty$型的函数极限计算题。

$\lim\limits_{t\to0}(1+3t)^{\frac{x}{t}}=\lim\limits_{t\to0}e^{\ln(1+3t)^{\frac{x}{t}}}=\lim\limits_{t\to0}e^{\frac{x}{t}\ln(1+3t)}=e^{\lim\limits_{t\to0}[\frac{x}{t}\ln(1+3t)]}$

只需算出$\lim\limits_{t\to0}[\frac{x}{t}\ln(1+3t)]$就大功告成了。

$$\lim_{t\to0}[\frac{x}{t}\ln(1+3t)]=\lim_{t\to0}\frac{x\ln(1+3t)}{t} \tag{1}$$

$\lim\limits_{t\to0}\frac{x\ln(1+3t)}{t}$可以写为

$$\lim_{t\to0}\frac{x\ln(1+3t)}{t}=x\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+3t)}{t} \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{t\to0}[\frac{x}{t}\ln(1+3t)]=x\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+3t)}{t} \tag{3}$$

由于$\lim\limits_{t\to0}3t=0$，根据等价无穷小可知

$$x\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+3t)}{t}=x\lim_{t\to0}\frac{3t}{t} \tag{4}$$

将(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{t\to0}[\frac{x}{t}\ln(1+3t)]=x\lim_{t\to0}\frac{3t}{t} \tag{5}$$

很明显有

$$x\lim_{t\to0}\frac{3t}{t}=3x \tag{6}$$

将(10)式、(6)式相结合，得

$$\lim_{t\to0}[\frac{x}{t}\ln(1+3t)]=3x \tag{7}$$

现在已经算出了$\lim\limits_{t\to0}[\frac{x}{t}\ln(1+3t)]=3x$，所以$\lim\limits_{t\to0}(1+3t)^{\frac{x}{t}}=e^{3x}$，$\lim\limits_{t\to0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=xe^{3x}$，即$f(x)=xe^{3x}$。

下面进行第二步，即求出 $f'(x)$。

由于 $f(x) = xe^{3x}$，所以 $f'(x) = (xe^{3x})' = e^{3x} + 3xe^{3x} = (1+3x)e^{3x}$。

所以本题应填 $(1+3x)e^{3x}$。

（10）设函数 $z = (1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$，则 $dz|_{(1,1)} =$ ________。

解：本题求 $dz|_{(1,1)}$，我们知道 $dz|_{(1,1)} = \frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)}dx + \frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1)}dy$，所以本题实际想考的是求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1)}$。

先来求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)}$。

已知 $z = (1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$，将这个式子两边取对数，得：$\ln z = \frac{x}{y}\ln(1+\frac{x}{y})$。

再将等式左右两侧同时对 x 求导。

等式左侧 $\ln z$ 对 x 求导得：$\frac{1}{z} \times \frac{\partial z}{\partial x}$。

等式右侧 $\frac{x}{y}\ln(1+\frac{x}{y})$ 对 x 求导得：$\frac{1}{y}[\ln(1+\frac{x}{y}) + \frac{x}{x+y}]$。

所以有 $\frac{1}{z} \times \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}[\ln(1+\frac{x}{y}) + \frac{x}{x+y}]$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{y}[\ln(1+\frac{x}{y}) + \frac{x}{x+y}]$。

接下来求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)}$，怎么求呢?有的同学说：“直接把 $x=1$，$y=1$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{y}[\ln(1+\frac{x}{y}) + \frac{x}{x+y}]$ 中就可以了。”可是，$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{y}[\ln(1+\frac{x}{y}) + \frac{x}{x+y}]$ 中还含有 z，怎么办?所以不能直接把 $x=1$，$y=1$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{y}[\ln(1+\frac{x}{y}) + \frac{x}{x+y}]$ 中，正确的做法应该是：先把 $x=1$，$y=1$ 代入等式 $z = (1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$ 中求出 z，然后再把 $x=1$，$y=1$ 以及求得的 z 代入 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{y}[\ln(1+\frac{x}{y}) + \frac{x}{x+y}]$ 中，求出 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)}$。

先将 $x=1$，$y=1$ 代入等式 $z = (1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$ 中，得

$z = (1+1)^1$

解得 $z=2$。

再将 $x=1$，$y=1$，$z=2$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{y}[\ln(1+\frac{x}{y}) + \frac{x}{x+y}]$ 中，得

$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)} = 2\ln 2 + 1$。

再来求$\frac{\partial z}{\partial y}\big|_{(1,1)}$。

已知$z=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$，将这个式子两边取对数，得：$\ln z=\frac{x}{y}\ln(1+\frac{x}{y})$。

再将等式左右两侧同时对y求导。

等式左侧$\ln z$对y求导得：$\frac{1}{z}\times\frac{\partial z}{\partial y}$。

等式右侧$\frac{x}{y}\ln(1+\frac{x}{y})$对$y$求导得：$-\frac{x}{y^2}[\ln(1+\frac{x}{y})+\frac{x}{x+y}]$。

所以有$\frac{1}{z}\times\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}[\ln(1+\frac{x}{y})+\frac{x}{x+y}]$，解得$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{y^2}[\ln(1+\frac{x}{y})+\frac{x}{x+y}]$。

接下来求$\frac{\partial z}{\partial y}\big|_{(1,1)}$。因为$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{y^2}[\ln(1+\frac{x}{y})+\frac{x}{x+y}]$中还含有$z$，所以不能直接把$x=1$，$y=1$代入$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{y^2}[\ln(1+\frac{x}{y})+\frac{x}{x+y}]$中。正确的做法应该是：先把$x=1$，$y=1$代入等式$z=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$中求出$z$，然后再把$x=1$，$y=1$以及求得的$z$代入$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{y^2}[\ln(1+\frac{x}{y})+\frac{x}{x+y}]$中，求出$\frac{\partial z}{\partial y}\big|_{(1,1)}$。

先将$x=1$，$y=1$代入等式$z=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$中，得

$z=(1+1)^1$

解得$z=2$。

再将$x=1$，$y=1$，$z=2$代入$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{y^2}[\ln(1+\frac{x}{y})+\frac{x}{x+y}]$中，得

$\frac{\partial z}{\partial y}\big|_{(1,1)}=-(2\ln2+1)$。

现在已经求出了$\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(1,1)}=2\ln2+1$，$\frac{\partial z}{\partial y}\big|_{(1,1)}=-(2\ln2+1)$，所以有$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(1,1)}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\big|_{(1,1)}\mathrm{d}y=(2\ln2+1)\mathrm{d}x-(2\ln2+1)\mathrm{d}y$。

所以本题应填$(2\ln2+1)\mathrm{d}x-(2\ln2+1)\mathrm{d}y$。

(11) 曲线$\tan(x+y+\frac{\pi}{4})=\mathrm{e}^y$在点$(0,0)$处的切线方程为________。

解：一元函数在点(x_0,y_0)处的切线方程为$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$。

对于本题而言，切线方程为$y-0=y'(0)(x-0)$，化简得$y=y'(0)x$，所以现在只需

求出 $y'(0)$ 即可。

要想求出 $y'(0)$，只需求出导函数 $y'(x)$，然后把 $x=0$ 代进去就可以了。

下面来求导函数 $y'(x)$。

将方程 $\tan(x+y+\frac{\pi}{4})=e^y$ 的等式左右两侧同时对 x 求导。等式左侧的 $\tan(x+y+\frac{\pi}{4})$ 对 x 求导得 $\frac{1}{\cos^2(x+y+\frac{\pi}{4})}\times(1+\frac{dy}{dx})$，等式右侧的 e^y 对 x 求导得 $e^y\times\frac{dy}{dx}$。

所以有 $\frac{1}{\cos^2(x+y+\frac{\pi}{4})}\times(1+\frac{dy}{dx})=e^y\times\frac{dy}{dx}$，解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y\cos^2(x+y+\frac{\pi}{4})-1}$。

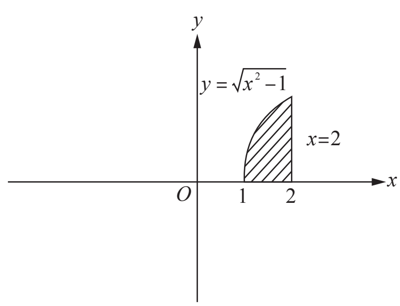
所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,0)}=\frac{1}{e^0\cos^2(0+0+\frac{\pi}{4})-1}=-2$。

现在已经求出了 $y'(0)=-2$，所以切线方程为 $y=y'(0)x=-2x$。

所以本题应填 $y=-2x$。

（12）曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________。

解：本题要求的是由曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积。首先在平面直角坐标系中画出由曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形，如下图所示。



注：有的同学不会画 $y=\sqrt{x^2-1}$ 的图，这其实很简单，$y=\sqrt{x^2-1}$ 经整理就是 $x^2-y^2=1$，这就是解析几何中的双曲线。

现在已经在平面直角坐标系中画出了由曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形。由于本题问的是该图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积，所以直接套用旋转体体积公式就可以了，即 $V=\int_1^2\pi r^2dx=\int_1^2\pi(x^2-1)dx=\frac{4}{3}\pi$。

所以本题应填$\frac{4}{3}\pi$。

(13) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\vec{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{x}$的秩为1，$\boldsymbol{A}$的各行元素之和为3，则$f$在正交变换$\vec{x}=\boldsymbol{Q}\vec{y}$下的标准形为________。

解：由于本题的二次型中包含三个未知数(x_1、x_2、x_3)，所以该二次型的对应矩阵(即矩阵$\boldsymbol{A}$)为三阶方阵。设矩阵$\boldsymbol{A}$为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

由于$\boldsymbol{A}$的各行元素之和为3，所以有$\begin{cases} a_{11}+a_{12}+a_{13}=3 \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=3 \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=3 \end{cases}$。将$\begin{cases} a_{11}+a_{12}+a_{13}=3 \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=3 \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=3 \end{cases}$写为矩阵相乘的形式就是$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=3\times\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

根据特征值、特征向量的定义式，可以知道3是矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值。

矩阵$\boldsymbol{A}$的秩是1，我们知道，一个n阶矩阵至少有$n-r$个特征值为0，所以矩阵$\boldsymbol{A}$至少有两个特征值为0。

综上所述，在矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值中有一个是3，至少有两个是0，所以矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值为3,0,0。

本题问的是f在正交变换$\vec{x}=\boldsymbol{Q}\vec{y}$下的标准形，那么系数肯定就是特征值，所以$y_1^2$的系数是3，$y_2^2$的系数是0，$y_3^2$的系数是0，所以标准形为$3y_1^2$。

本题应填$3y_1^2$。

(14) 设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则$E(XY^2)=$________。

解：首先，给大家介绍一下有关“二维正态分布”的知识。

第一点：若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。

第二点：若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0)$，则$X$、$Y$相互独立。

现在正式来看这道题。

由于二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，由前面介绍的“第一点”可知，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$。

由于二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，由前面介绍的“第二点”可知，$X$、$Y$相互独立。

由于X、Y相互独立，所以X、Y^2相互独立。

由于X、Y^2相互独立，所以有$E(XY^2)=E(X)\times E(Y^2)$。

现在只需求出$E(X)$和$E(Y^2)$，然后相乘就可以了。

那么$E(X)$和$E(Y^2)$该如何求呢？请看下表。

分　布	数学期望	方　差
① 二项分布 $B(n,p)$	np	$np(1-p)$
② 泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
③ 几何分布 $G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
④ 均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
⑤ 指数分布 $E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
⑥ 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
⑦χ^2 分布$\chi^2(n)$	n	$2n$
⑧t 分布 $t(n)$	0	$\frac{n}{n-2}$

由上表中的“⑥”直接可得$E(X)=\mu$。

可是$E(Y^2)$由上表是得不到的，怎么办?利用公式$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$来求就可以了。具体来说就是：通过上表得到$D(Y)$和$E(Y)$，然后用$D(Y)$加上$[E(Y)]^2$就可以得到$E(Y^2)$了。

由上表中的“⑥”直接可得$E(Y)=\mu$，$D(Y)=\sigma^2$，所以$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=\sigma^2+\mu^2$。

现在$E(X)$和$E(Y^2)$都已经求出来了。

所以$E(XY^2)=E(X)\times E(Y^2)=\mu(\mu^2+\sigma^2)$。

本题的答案为$\mu(\mu^2+\sigma^2)$。

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$。

解：由于当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)$ 和 x 是等价无穷小，所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2} \tag{1}$$

由于$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to0}[\sqrt{1+2\sin x}-x-1]=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$属于“$\dfrac{0}{0}$型”的函数极限计算题。可以使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x} \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2\cos}{2\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x} \tag{3}$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2\cos}{2\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}$可以整理为

$$\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x\sqrt{1+2\sin x}} \tag{4}$$

将(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x\sqrt{1+2\sin x}} \tag{5}$$

$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x\sqrt{1+2\sin x}}$可以拆为

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x\sqrt{1+2\sin x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x} \tag{6}$$

将(5)式、(6)式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x} \tag{7}$$

由代入法可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}=\frac{1}{\sqrt{1+2\times\sin 0}}=1 \tag{8}$$

将(8) 式代入(7) 式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x} \tag{9}$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}[\cos x-\sqrt{1+2\sin x}]=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x}$属于“$\dfrac{0}{0}$型”的函数极限计算题。可以使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\dfrac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}}{1} \tag{10}$$

将(9) 式、(10) 式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\dfrac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}}{1} \tag{11}$$

由代入法可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\dfrac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}}{1}=\frac{-\sin 0-\dfrac{2\cos 0}{2\sqrt{1+2\sin 0}}}{1}=-1 \tag{12}$$

将(12) 式代入(11) 式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\times(-1)=-\frac{1}{2} \tag{13}$$

(16)（本题满分 9 分）

已知函数$f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$ 是$f(u,v)$ 的极值，$z=f(x+y,f(x,y))$。求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$。

解：可能有一些同学看不懂问题“求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$”，先给大家解释一下。“求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$”指的就是“求$\left.\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$”。

为了求出最终的$\left.\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$，要分三步走。

第一步：求出$\frac{\partial z}{\partial x}$。

第二步：求出$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

第三步：求出$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)}$。

先进行第一步，即求出$\frac{\partial z}{\partial x}$。

已知$z = f(x + y, f(x,y))$，设$u = x + y$，$v = f(x,y)$，则$z = f(u,v)$。

由于$z = f(u,v)$，所以$\frac{\partial z}{\partial x} = f^1(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + f^2(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}$。

由于$u = x + y$，所以$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$。

由于$v = f(x,y)$，所以$\frac{\partial v}{\partial x} = f'_1(x,y)$。

由于$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$，$\frac{\partial v}{\partial x} = f'_1(x,y)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f^1(u,v) + f^2(u,v)f'_1(x,y)$$

再进行第二步，即求出$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

由于$\frac{\partial z}{\partial x} = f^1(u,v) + f^2(u,v)f'_1(x,y)$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11}(u,v) + f''_{12}(u,v) \cdot f'_2(x,y) + f''_{12}(x,y) \cdot f'_2(u,v) + f'_1(x,y)[f''_{21}(u,v) + f''_{22}(u,v) \cdot f'_2(x,y)]$$

对于上式的解释：

①$f''_{11}(u,v) + f''_{12}(u,v) \cdot f'_2(x,y)$是$f^1(u,v)$对$y$求偏导的结果。

②$f''_{12}(x,y) \cdot f'_2(u,v) + f'_1(x,y)[f''_{21}(u,v) + f''_{22}(u,v) \cdot f'_2(x,y)]$是$f^2(u,v)f'_1(x,y)$对$y$求偏导的结果。

最后进行第三步，即求出$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)}$。

已知$f(1,1) = 2$是$f(u,v)$的极值，根据二元函数极值的求解方法，可以知道$f'_1(1,1) = 0$，$f'_2(1,1) = 0$。而我们设的是$u = x + y$，$v = f(x,y)$，所以当$x = 1$且$y = 1$时，有$u = 2$和$v = 2$。综上所述，$f(1,1) = 2$，$f'_1(1,1) = 0$，$f'_2(1,1) = 0$，当$x = 1$且$y = 1$时有$u = 2$和$v = 2$。所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)} = f''_{11}(2,2)+f''_{12}(2,2)\cdot f'_2(1,1)+f''_{12}(1,1)\cdot f'_2(2,2)+f'_1(1,1)[f''_{21}(2,2)+f''_{22}(2,2)\cdot f'_2(1,1)]$$

$$=f''_{11}(2,2)+f''_{12}(2,2)\cdot 0+f''_{12}(1,1)\cdot f'_2(2,2)+0\cdot[f''_{21}(2,2)+f''_{22}(2,2)\cdot 0]$$

$$=f''_{11}(2,2)++f''_{12}(1,1)\cdot f'_2(2,2)$$

所以本题的答案为$f''_{11}(2,2)++f''_{12}(1,1)\cdot f'_2(2,2)$。

(17)(本题满分 10 分)

求不定积分$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

解:本题明显属于不定积分的计算题。大家记住,对于不定积分的计算题,只要它的被积函数中含有根号,就要用换元法来做。

本题所给的不定积分是$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$,被积函数是$\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}$,含有根号,所以应该采用换元法。

令 $t=\sqrt{x}$,则 $\arcsin\sqrt{x}=\arcsin t$,$\ln x=\ln t^2=2\ln t$,$\mathrm{d}x=\mathrm{d}(t^2)=2t\mathrm{d}t$,所以

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\left(2t\times\frac{\arcsin t+2\ln t}{t}\right)\mathrm{d}t \tag{1}$$

$\int\left(2t\times\frac{\arcsin t+2\ln t}{t}\right)\mathrm{d}t$ 可以拆为

$$\int\left(2t\times\frac{\arcsin t+2\ln t}{t}\right)\mathrm{d}t=\int 2\arcsin t\mathrm{d}t+\int 4\ln t\mathrm{d}t \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合,得

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int 2\arcsin t\mathrm{d}t+\int 4\ln t\mathrm{d}t \tag{3}$$

由(3)式可以知道,分别计算出$\int 2\arcsin t\mathrm{d}t$ 和$\int 4\ln t\mathrm{d}t$,然后把它们相加就可以了。

先来计算$\int 2\arcsin t\mathrm{d}t$ 。

$$\int 2\arcsin t\mathrm{d}t=2\int\arcsin t\mathrm{d}t \tag{4}$$

由分部积分公式可知

$$2\int\arcsin t\mathrm{d}t=2\left[t\arcsin t-\int t\mathrm{d}(\arcsin t)\right] \tag{5}$$

将(4)式、(5)式相结合,得

$$\int 2\arcsin t\mathrm{d}t = 2\left[t\arcsin t - \int t\mathrm{d}(\arcsin t)\right] \tag{6}$$

由于$(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$，所以(6)式可以化为

$$\int 2\arcsin t\mathrm{d}t = 2\left(t\arcsin t - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\right) \tag{7}$$

(7)式很明显可以写为

$$\int 2\arcsin t\mathrm{d}t = 2\left(t\arcsin t + \int -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\right) \tag{8}$$

这里告诉大家一个导数公式$(\sqrt{1-t^2})' = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$，所以(8)式可以变为

$$\int 2\arcsin t\mathrm{d}t = 2(t\arcsin t + \sqrt{1-t^2}) + C_1 \tag{9}$$

有的同学可能奇怪C_1是怎么出来的?我来回答这个问题：当计算一道不定积分的题目时，如果经过一系列的计算后，最终已经不再含有积分号“$\int$”，这个时候就需要在最后加上任意常数C。因为一会儿还要计算$\int 4\ln t\mathrm{d}t$，最后也会有任意常数，所以这里不妨用C_1，另一个用C_2。

那现在$\int 2\arcsin t\mathrm{d}t$已经计算完了吗?还没有，还需要把(9)式的等式右侧所有的t都换为$\sqrt{x}$。即

$$\int 2\arcsin t\mathrm{d}t = 2(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) + C_1 \tag{10}$$

再来计算$\int 4\ln t\mathrm{d}t$。

很明显，$\int 4\ln t\mathrm{d}t$可以写为

$$\int 4\ln t\mathrm{d}t = 4\int \ln t\mathrm{d}t \tag{11}$$

由分部积分公式可知

$$4\int \ln t\mathrm{d}t = 4\left[t\ln t - \int t\mathrm{d}(\ln t)\right] \tag{12}$$

将(11)式、(12)式相结合，得

$$\int 4\ln t\mathrm{d}t = 4\left[t\ln t - \int t\mathrm{d}(\ln t)\right] \tag{13}$$

将“d”后面的“$\ln t$”移到被积函数中，得

$$\int 4\ln t\mathrm{d}t = 4\left(t\ln t - \int 1\mathrm{d}t\right) \tag{14}$$

(14) 式很明显可以写为

$$\int 4\ln t\mathrm{d}t = 4(t\ln t - t) + C_2 \tag{15}$$

最后把(15) 式的等式右侧所有的 t 都换为$\sqrt{x}$，即

$$\int 4\ln t\mathrm{d}t = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \sqrt{x}) + C_2 \tag{16}$$

现在把$\int 2\arcsin t\mathrm{d}t = 2(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) + C_1$，$\int 4\ln t\mathrm{d}t = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \sqrt{x}) + C_2$ 代入(3) 式中，得

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C \tag{17}$$

(18)(本题满分 10 分)

证明方程 $4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根。

解：本题明显属于“求方程实根个数的题”。“求实根个数的题”有其固定的解题套路，我们只需要套用解题套路就可以了。

“求方程实根个数的题”的固定的解题套路如下。

第一步：设辅助函数。记所给的方程是$f(x) = g(x)$，设辅助函数 $F(x) = f(x) - g(x)$。

第二步：确定辅助函数 $F(x)$ 的定义域。

第三步：求两种值。

一是辅助函数 $F(x)$ 在定义域内的所有极值。

二是辅助函数 $F(x)$ 在定义域端点处的函数值或极限值(如果定义域两边都是闭的，就求两边的函数值;如果定义域一边开一边闭，那就开的那边求极限值，闭的那边求函数值;如果定义域两边都是开的，那就求两边的极限值)。

第四步：写两行东西。

第一行从左到右写：定义域的左端点、最小的极值点、第二小的极值点、……、最大的极值点、定义域的右端点。

第二行从左到右写：定义域的左端点对应的函数值或极限值、最小的极值点对应的极值、第二小的极值点对应的极值、……、最大的极值点对应的极值、定义域的右端点对应的函数值或极限值。

然后，看第二行相邻的数。

如果异号，说明这两个相邻的点之间存在一个实根。

如果同号，说明这两个相邻的点之间不存在实根。

如果这两个相邻的数中有一个是 0，那么算同号，说明这两个相邻的点之间不存在实

根，但0这个点本身算是一个实根；

如果这两个相邻的数都是0，那么算同号，说明这两个相邻的点之间不存在实根，但这两个0点本身算是两个实根；

“求方程实根个数的题”的固定解题套路已经给大家讲完了。现在就按这个固定的解题套路来解本题。

第一步：设辅助函数。记题中所给的方程是$f(x)=g(x)$，设辅助函数$F(x)=f(x)-g(x)$。

对于本题而言，由于$f(x)=4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$，$g(x)=0$，所以设辅助函数$F(x)=4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$。

第二步：确定辅助函数$F(x)$的定义域。

对于本题而言，函数$F(x)$的定义域显然是$(-\infty,+\infty)$。

第三步：求两种值。

一是辅助函数$F(x)$在定义域内的所有极值。

二是辅助函数$F(x)$在定义域端点处的函数值或极限值(如果定义域两边都是闭的，那就求两边的函数值;如果定义域一边开一边闭，那就开的那边求极限值，闭的那边求函数值;如果定义域两边都是开的，那就求两边的极限值)。

对于本题而言，先求函数$F(x)$在定义域$(-\infty,+\infty)$内的所有极值。

想要求极值就必须先求极值点，极值点要么是驻点，要么是不可导点。所以先对函数$F(x)$求导。

$$F'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1$$

显然在定义域$(-\infty,+\infty)$内函数$F(x)$没有不可导点，因为无论$\frac{4}{1+x^2}-1$中的x在$(-\infty,+\infty)$内取任何值，$\frac{4}{1+x^2}-1$都有意义。所以我们考察驻点。

所谓“驻点”，指的是“一阶导数为0的点”。令一阶导数$F'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1=0$来解$x$，解出的$x$就是驻点。

令$F'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1=0$之后，解出的驻点有两个，分别是$x=\sqrt{3}$和$x=-\sqrt{3}$。

综上所述，求出的驻点和不可导点共有两个(其中驻点两个，不可导点零个)，分别是$x=\sqrt{3}$和$x=-\sqrt{3}$。所以，可能极值点一共有两个，下面验证一下这两个可能极值点究竟是不是极值点。

先来验证 $x=-\sqrt{3}$ 是不是极值点。在区间 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 内任取一个点，代入导函数 $F'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1$ 中，发现小于0。再在区间 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 内任取一个点，代入导函数 $F'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1$ 中，发现大于0。由于一个大于0一个小于0，所以 $x=-\sqrt{3}$ 是极值点。

再来验证 $x=\sqrt{3}$ 是不是极值点。在区间 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 内任取一个点，代入导函数 $F'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1$ 中，发现大于0。再在区间 $(\sqrt{3},+\infty)$ 内任取一个点，代入导函数 $F'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1$ 中，发现小于0。由于一个大于0一个小于0，所以 $x=\sqrt{3}$ 是极值点。

现在已经确定：$x=-\sqrt{3}$ 和 $x=\sqrt{3}$ 是极值点。下面就来求相应的极值。

$$F(\sqrt{3})=2\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$$

$$F(-\sqrt{3})=0$$

现在，极值已经求出来了。那么"第三步"完了吗?还没完!因为"第三步"除了要算"辅助函数 $F(x)$ 在定义域内的所有极值"外，还要算"辅助函数 $F(x)$ 在定义域端点处的函数值或极限值"。

现在就来算一下辅助函数 $F(x)$ 在定义域端点处的函数值或极限值。之前在"第二步"的时候，已经确定了辅助函数 $F(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所以现在需要算一下 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$。计算可知

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$$

现在"第三步"就完成了。

第四步：写两行东西。

第一行从左到右写：定义域的左端点、最小的极值点、第二小的极值点、……、最大的极值点、定义域的右端点。

第二行从左到右写：定义域的左端点对应的函数值或极限值、最小的极值点对应的极值、第二小的极值点对应的极值、……、最大的极值点对应的极值、定义域的右端点对应的函数值或极限值。

然后，看第二行相邻的数。

如果异号，说明这两个相邻的点之间存在一个实根；

如果同号，说明这两个相邻的点之间不存在实根；

如果这两个相邻的数中有一个是0，那么算同号，说明这两个相邻的点之间不存在实根，但0这个点本身算是一个实根；

如果这两个相邻的数都是0，那么算同号，说明这两个相邻的点之间不存在实根，但这两个0点本身算是两个实根；

对于本题而言

第一行：$-\infty \quad -\sqrt{3} \quad \sqrt{3} \quad +\infty$

第二行：$+\infty \quad 0 \quad 2(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}) \quad -\infty$

我们就看第二行，不看第一行(有的同学问既然不看第一行，那为什么要写第一行。其实写第一行的目的是为了让第二行与第一行对应，只看第二行就可以了)。第二行一共写了四个东西。

先来看最左边的两个：$+\infty$ 和0。虽然它们并不异号(有0就不算异号)，但是这只说明它们俩之间没有实根，0本身算一个实根。现在有一个实根。

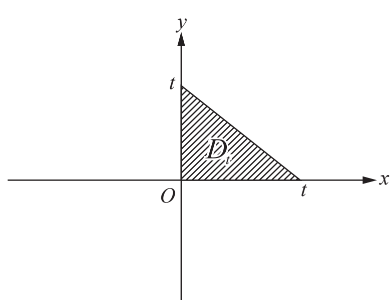
再来看0和$2(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3})$，虽然它们并不异号(有0就不算异号)，但是这只说明它们俩之间没有实根，0本身算一个实根，可是0这个实根刚才已经知道了，所以现在还是有一个实根。

再来看$2(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3})$和$-\infty$，很明显是异号的，一正一负，所以说明它们俩之间有一个实根。所以一共有两个实根。

(19)(本题满分11分)

设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有连续导数，$f(0)=1$，且满足$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x, 0\leqslant x\leqslant t\}(0<t\leqslant 1)$。求$f(x)$的表达式。

解：$D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x, 0\leqslant x\leqslant t\}(0<t\leqslant 1)$，所以先在平面直角坐标系中画出积分区域$D_t$，如下图所示。



已知$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，不妨来计算一下$\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$和$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

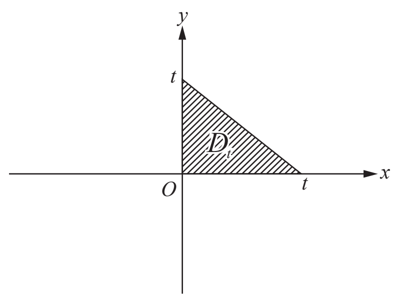
先来计算一下$\iint\limits_{D_t} f(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

$$\iint\limits_{D_t} f(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(t)\iint\limits_{D_t} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{t^2}{2}f(t)$$

对于上式的解释：首先，$f(t)$ 就当成常数(因为并不是对 t 积分)，提到积分号之外，提完之后被积函数就变成 1。当二重积分的被积函数为 1 时，二重积分的值就是积分区域的面积，所以计算一下三角形的面积就可以了。

再来计算一下$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

由于积分区域 D_t 为



所以

$$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^t \mathrm{d}x\int_0^{t-x} f'(x+y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^t \mathrm{d}x\int_0^{t-x} f'(x+y)\,\mathrm{d}(y+x) \quad \left\{\begin{array}{l}\text{因为对积分的时候，}\\ \text{相当于是常数，后}\\ \text{面可以任意加常数}\end{array}\right.$$

$$= \int_0^t \mathrm{d}x\int_0^{t-x} f'(u)\,\mathrm{d}u \quad \left\{\begin{array}{l}\text{令 } x+y=u\text{，别忘了换元时}\\ \text{上下限也换}\end{array}\right.$$

$$= \int_0^t f(t) - f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^t f(t)\,\mathrm{d}x - \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= f(t)\int_0^t 1\,\mathrm{d}x - \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= tf(t) - \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

现在已经计算出$\iint\limits_{D_t} f(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{t^2}{2}f(t)$，$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = tf(t) - \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$，已知$\iint\limits_{Dt} f'(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{Dt} f(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以有

$$\frac{t^2}{2}f(t)=tf(t)-\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

对(1)式两端求导得

$$tf(t)+\frac{t^2}{2}f'(t)=f(t)+f'(t)t-f(t) \tag{2}$$

(2)式可以整理为

$$f'(t)=\frac{2}{2-t}f(t) \tag{3}$$

(3)式很明显是一个一阶微分方程，可以解得该微分方程的通解为$f(t)=\frac{C}{(2-t)^2}$。$f(0)=1$，可以求得$C=4$。

所以$f(t)=\frac{4}{(2-t)^2}(0\leqslant t\leqslant 1)$，$f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$。

(20)(本题满分11分)

设向量组$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$不能由向量组$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$线性表示。

(Ⅰ)求a的值。

(Ⅱ)将$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_3$用$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$线性表示。

解：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

先把$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$这三个向量写成一个矩阵，即$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}$。

然后计算一个该矩阵所对应的行列式的值。即

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=1$$

由于该矩阵所对应的行列式的值等于1，不等于0，说明矩阵$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$是满秩矩阵，秩为3。并且$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$也是三个向量，说明$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$这三个向量线性无关。

已知$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$不能由$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_3$线性表示，所以可得：$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_2$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_3$这三个向量是线性相关的。

由此可得$|\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2,\vec{\boldsymbol{\beta}}_3|=0$。

由于$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$，所以

$$|\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2,\vec{\boldsymbol{\beta}}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}$$

通过计算可得$|\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2,\vec{\boldsymbol{\beta}}_3|=a-5$

刚才已经推出$|\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2,\vec{\boldsymbol{\beta}}_3|=0$，所以有$a-5=0$，解得$a=5$。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问要求将$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，$\vec{\beta}_3$用$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$线性表示，这问题实际上是要求将$\vec{\beta}_1$、$\vec{\beta}_2$、$\vec{\beta}_3$分别用$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$线性表示。

这里只详细解一下“将$\vec{\beta}_1$用$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$线性表示”，另两问则给出答案。解法是相同的。

现在来解“将$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1$用$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$线性表示”。

我先写一个式子：

$$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1=x_1\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+x_2\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2+x_3\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$$

最终只需解出x_1,x_2,x_3即可。

由于$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$，所以$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1=x_1\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+x_2\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2+x_3\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$可以展开为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$，而$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$可以进一步的展开为

$$\begin{cases}x_1+x_3=1\\x_2+3x_3=1\\x_1+x_2+5x_3=1\end{cases}$$

这是一个非齐次线性方程组，现在只需要解这个方程组就可以了。

由于该方程组中所包含的方程个数是3，未知数个数也是3，所以此方程组属于“方程个数等于未知数个数”的方程组，可以用克拉默法则来求解。

先来计算一下该非齐次线性方程组的系数行列式D。

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=5+0+0-1-3-0=1$$

1

用方程组右侧的1 替换第一列，得

1

$$D_1=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=5+0+1-1-3-0=2$$

1

再用方程组右侧的1 替换第二列，得

1

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=5+3+0-1-3-0=4$$

1

最后，用方程组右侧的1 替换第三列，得

1

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=1+0+0-1-1-0=-1$$

综上所述，有

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{2}{1}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{4}{1}=4,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-1}{1}=-1$$

所以有$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1=2\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+4\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2-\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$。

这样，“将$\vec{\beta}_1$ 用$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$ 线性表示”就已经完成了，同理有

$$\vec{\boldsymbol{\beta}}_2=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+2\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2$$

$$\vec{\boldsymbol{\beta}}_3=5\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+10\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2-2\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3$$

(21)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量。

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$。

解：本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 肯定总共有三个特征值。

现在先把"特征值、特征向量的定义式"告诉大家。

设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，使得 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}=\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{\xi}}(\vec{\boldsymbol{\xi}}\neq\vec{\boldsymbol{0}})$ 成立的数 λ 和非零向量 $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ 分别称为：方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量（或称为：方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 所对应的特征向量）。

由于 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，可以把这个等式拆分为两个等式。

第一个等式是：$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$。

第二个等式是：$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$。

先来看第一个等式。$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$可以写为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，根据"特征值、特征向量的定义式"直接可得：$-1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，该特征值对应的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，其中 $k_1\neq 0$。

再来看第二个等式。$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$可以写为 $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，根据"特征值、特征向量的定义式"直接可得：1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，该特征值对应的全部特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 $k_2\neq 0$。

又由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵且秩为 2，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第三个特征值是 0（对于实对称矩阵而言，实对称矩阵有 $n-r$ 个为 0 的特征值，所以对于本题所给的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而言，有 $3-2=1$ 个特征值为 0）。

第（Ⅰ）问这样就做完了吗?并没有，还要求出 0 这个特征值所对应的特征向量。怎么求呢?就根据"实对称矩阵不同特征值所对应的特征向量必正交"来求。

设$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$为特征值 0 所对应的若干个特征向量之一，那么：

由于特征值 0 和特征值 1 是两个不同的特征值，这两个特征值所对应的特征向量是正交的。所以有$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$正交，有 $1a_1+0a_2+1a_3=0$，化简得 $a_1+a_3=0$。

由于特征值 0 和特征值 −1 是两个不同的特征值，这两个特征值所对应的特征向量是正交的。所以有$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$正交，有 $1a_1+0a_2+1a_3=0$，化简得 $a_1-a_3=0$。

将两个式子联立

$$\begin{cases}a_1+a_3=0\\a_1-a_3=0\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a_1=0\\a_2=1\\a_3=0\end{cases}$

有的同学可能会想为什么 $a_2=1$。实际上，因为$\begin{cases}a_1+a_3=0\\a_1-a_3=0\end{cases}$中根本就没有出现 a_2，所以 a_2 可以任意取值。但是大家一定要注意，a_2 不能等于 0，否则就有$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，而特征向量的定义中规定特征向量必须是非零向量，所以 a_2 不能等于 0。我们就取 $a_2=1$。

现在已经解出$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，即特征值 0 所对应的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 $k_3\neq0$。

第(Ⅰ)问到这里就完成了，即：

−1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且特征值 −1 对应的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，其中 $k_1\neq0$。

1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且特征值 1 对应的全部特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 $k_2\neq0$。

0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且特征值 0 对应的全部特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 $k_3 \neq 0$。

再来看第(Ⅱ)问。

由于 1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 是特征值 1 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$。

由于 -1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 是特征值 -1 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，即 $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$。

由于 0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 是特征值 0 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$。

现在就得到了如下三个式子：

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

将这三个式子写在一起，有

$$A\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

将等式左右两侧同时右乘$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}$得

$$A\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

化简得

$$AE=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

再化简得

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

最后的计算结果为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$。

(Ⅰ)求二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}。

解:本题有三问,先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问求的是二维随机变量(X,Y)的概率分布。

有很多同学认为“概率分布”指的是分布函数，也有很多同学认为“概率分布”指的是概率密度函数，这都是错误的。其实，“概率分布”指的是“分布律”，也就是一张表格。

所以这第(Ⅰ)问其实是求二维随机变量(X,Y)的联合分布律。

现在来做第(Ⅰ)问。

由于随机变量X的可能取值是0、1，随机变量Y的可能取值是-1、0、1，所以二维随机变量(X,Y)的可能取值共有如下情况：

$(X,Y)=(0,-1)$

$(X,Y)=(0,0)$

$(X,Y)=(0,1)$

$(X,Y)=(1,-1)$

$(X,Y)=(1,0)$

$(X,Y)=(1,1)$

我们首先画出下表

$X \backslash Y$	-1	0	1	
0	a	b	c	$\frac{1}{3}$
1	d	e	f	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

最终就是要把a、b、c、d、e、f求出来。

由于$P\{X^2=Y^2\}=1$，所以有$d+b+f=1$，而我们知道，$a+b+c+d+e+f=1$，所以有$a+c+e=0$。

又由于$a\geqslant 0$，$c\geqslant 0$，$e\geqslant 0$，所以$a=0$，$c=0$，$e=0$，由此画出下表。

$X \backslash Y$	-1	0	1	
0	0	b	0	$\frac{1}{3}$
1	d	0	f	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

由于$0+d=\frac{1}{3}$，所以$d=\frac{1}{3}$。

由于$b+0=\frac{1}{3}$，所以$b=\frac{1}{3}$。

由于 $0+f=\frac{1}{3}$，所以 $f=\frac{1}{3}$。

综上所述，有下表。

$X \backslash Y$	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

第(Ⅰ)问就解出来了。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问求 Z 的概率分布，也就是求 Z 的分布律。

已知 $Z=XY$，现在就来看 Z 的可能取值有几个(即 X 乘以 Y 的可能取值有几个)。由于随机变量 X 的可能取值是 0、1，随机变量 Y 的可能取值是 -1、0、1，所以 Z(也就是 X 乘以 Y) 的可能取值一共有三个，分别是：-1、0、1。由此得下表。

Z	-1	0	1
P	p_1	p_2	p_3

现在只需求出 p_1、p_2、p_3。

先来求 p_1。

p_1 指的是 $P(Z=-1)$，那么 Z 什么时候才能等于 -1 呢?由于 $Z=XY$，所以当 $X=1$，$Y=-1$ 时 $Z=1$。于是有 $p_1=P(Z=-1)=P(X=1,Y=-1)$。由第(Ⅰ)问求得的联合分布律。

$X \backslash Y$	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

可知 $P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{3}$，所以 $p_1=P(Z=-1)=P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{3}$。

再来求 p_2。

p_1 指的是 $P(Z=0)$，那么 Z 什么时候才能等于 0 呢?由于 $Z=XY$，所以当 $X=0$、$Y=-$

1 或 $X=0$、$Y=0$ 或 $X=0$、$Y=1$ 或 $X=1$、$Y=0$ 时 $Z=1$。所以有 $p_2=P(Z=0)=P(X=0,Y=-1)+P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)$。由第(Ⅰ)问求得的联合分布律

$X \backslash Y$	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

可知 $P(X=0,Y=-1)=0$，$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{3}$，$P(X=0,Y=1)=0$，$P(X=1,Y=0)=0$，所以 $p_2=P(Z=0)=P(X=0,Y=-1)+P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=0+\frac{1}{3}+0+0=\frac{1}{3}$。

最后来求 p_3。

p_3 指的是 $P(Z=1)$，那么 Z 什么时候才能等于 1 呢?由于 $Z=XY$，所以，当 $X=1$、$Y=1$ 时 $Z=1$。所以有 $p_3=P(Z=1)=P(X=1,Y=1)$。由第(Ⅰ)问求得的联合分布律

$X \backslash Y$	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

可知 $P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$，所以 $p_3=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$。

好，现在 p_1、p_2、p_3 都已经求出来了，所以 Z 的分布律为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

第(Ⅱ)问就做完了。

最后来看第(Ⅲ)问。

第(Ⅲ)问是求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}。大家记住，考研中涉及相关系数的公式只有一个，那就是 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$。所以第(Ⅲ)问必然要用到这个公式。

先来求一下随机变量 X 与随机变量 Y 的协方差，也就是 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，利用公式 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ 来求。

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(Z)-E(X)E(Y)$

由于 Z 的分布律为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

所以 $E(Z)=-1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0$。

由于 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$。

由于 Y 的分布律为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

所以 $E(Y)=-1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0$。

所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-\frac{2}{3}\times 0=0$。

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{0}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$

第(Ⅲ)问就做完了，需要注意的是：$\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$ 根本就没有必要去求，因为分子已经是 0 了，所以最后结果肯定是 0。

(23)(本题满分 11 分)

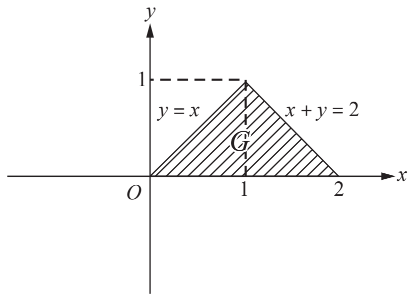
设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，其中 G 是由 $x-y=0, x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域。

(Ⅰ)求 X 的概率密度 $f_X(x)$；

(Ⅱ)求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$。

解：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

G 是由 $x-y=0$,$x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域，先在平面直角坐标系中画出区域 G，如下图所示。



我先告诉大家一个结论：一旦某道题中说二维随机变量(X,Y)在区域 G 上服从均匀分布，则二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数$f(x,y)$为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A},(x,y)\in G\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

式中，A 是区域 G 的面积。

对于本题而言，由上述结论可知，联合概率密度函数$f(x,y)$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases}1,0<y<1,y<x<2-y\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

有的同学不明白为什么是“$0<y<1,y<x<2-y$”，这是因为：上图中 y 的最大小值分别是 0 和 1，而如果画一条与 x 轴平行且与阴影区域相交的直线，那么在该直线与阴影区域的边界相交的两个点中，横坐标小的那个点肯定是在 $x=y$ 上，横坐标大的那个点肯定是在 $x=2-y$ 上。

可能有的同学还不明白：为什么看 y 的最值，而画与 x 轴平行的直线?为什么不看 x 的最值，而画与 y 轴平行的直线?这是因为：这样就必须分类讨论了，比较麻烦。

第(Ⅰ)问求的是边缘概率密度函数$f_X(x)$。所以很明显现在属于“已知联合概率密度函数，求边缘概率密度函数”。

先给大家总结一下“已知联合概率密度函数，求边缘概率密度函数”的解题方法。

解题方法分为两个步骤。

步骤 1. 确定边缘概率密度函数不为 0 的段的定义域

若需要求解的是$f_X(x)$：

(1) 先将$f_X(x)$ 写为$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,\square\\ 0,\text{其他}\end{cases}$；

(2) 然后在平面直角坐标系中画出联合概率密度函数$f(x,y)$不为0的段的定义域，并涂上阴影；

(3) 最后看一下阴影区域中x可以取到的最大值和最小值是多少，即可确定“□”。

特殊情况：若确定出的“□”为“$-\infty<x<+\infty$”，$f_X(x)$就不用分成两段了，而是直接写为$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,\ -\infty<x<+\infty$。

若需要求解的是$f_Y(y)$：

(1) 则先将$f_Y(y)$写为$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x, & \square \\ 0, & 其他\end{cases}$；

(2) 然后在平面直角坐标系中画出联合概率密度函数$f(x,y)$不为0的段的定义域，并涂上阴影；

(3) 最后看一下阴影区域中y可以取到的最大值和最小值是多少，即可确定“□”。

特殊情况：若确定出的“□”为“$-\infty<y<+\infty$”，$f_Y(y)$就不用分成两段了，而是直接写为$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x,\ -\infty<y<+\infty$。

步骤2. 计算

若需要求解的是$f_X(x)$：

(1) 在前面画出的图中再画一条与y轴平行且和阴影区域相交的直线，当然，有很多种画法，但无论哪种画法，这条与y轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段，我们就利用这条线段上y的最大值和最小值来替换$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$中的$+\infty$和$-\infty$。

(2) 接着，要将被积函数$f(x,y)$显化为其不为0的段。

(3) 最后要做的就是纯计算了。

若需要求解的是$f_Y(y)$：

(1) 在前面画出的图中再画一条与x轴平行且和阴影区域相交的直线，当然，有很多种画法，但无论哪种画法，这条与x轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段，我们就利用这条线段上x的最大值和最小值来替换$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$中的$+\infty$和$-\infty$。

(2) 接着，要将被积函数$f(x,y)$显化为其不为0的段。

(3) 最后要做的就是纯计算了。

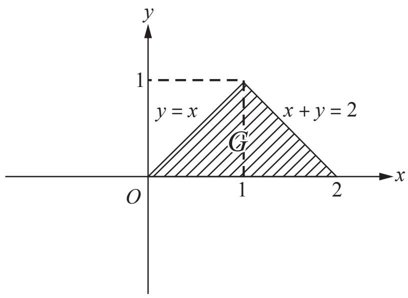
以上就是“已知联合概率密度函数，求边缘概率密度函数”的解题方法。针对本题而言，当然也是按照这两个步骤来做。

步骤1：

先将$f_X(x)$写为$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y, & \square \\ 0, & 其他\end{cases}$，然后在平面直角坐标系中画出联合概率

密度函数$f(x,y)$ 不为 0 的段的定义域并涂上阴影。

$f(x,y) = \begin{cases} 1, 0 < y < 1, y < x < 2 - y \\ 0, 其他 \end{cases}$，不为 0 的段是 1，不为 0 的段的定义域是 $0 < y < 1, y < x < 2 - y$。$0 < y < 1, y < x < 2 - y$ 的图如下图所示。



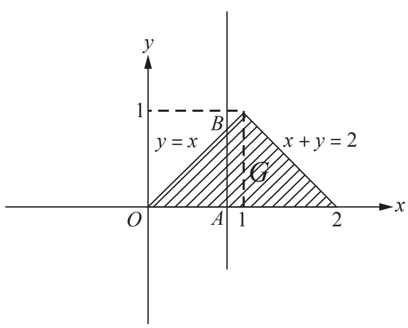
从这个图中可以很明显地看出，阴影区域中x的最大值为2，最小值为0，即$0 < x < 2$，所以有：

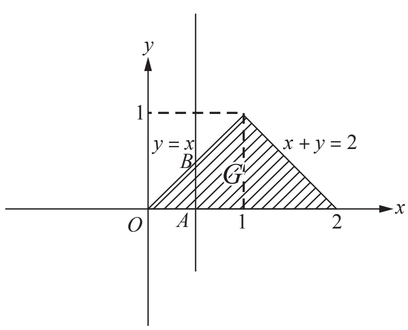
$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y, 0 < x < 2 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

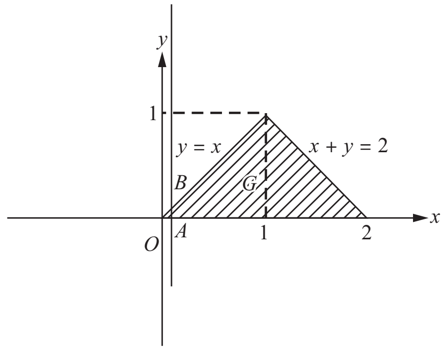
接下来进行步骤 2，也就是算出$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$。

步骤 2：

首先，在前面画出的图中再画一条与 y 轴平行且和阴影区域相交的直线，如下图所示为其中三种情况。





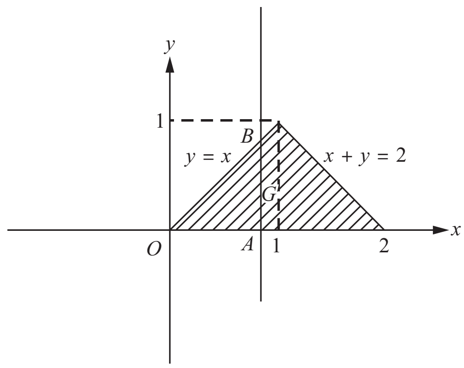


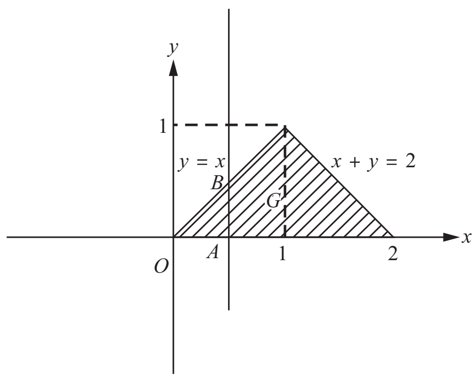
有些同学认为：这条直线有很多种画法，但无论哪种画法，这条与y轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上y的最大值肯定是在B点取到，最小值肯定是在A点取到。很显然，B点的纵坐标$y=x$，A点的纵坐标$y=0$。

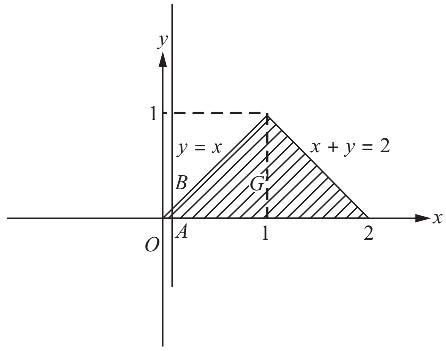
这种想法完全错误，原因在于：只有当$0 \leqslant x < 1$的时候是这样，而当$1 \leqslant x \leqslant 2$时就完全不是这样了。所以必须分两种情况来讨论。

情况1：当$0 \leqslant x < 1$时。

与y轴平行且和阴影区域相交的直线如下图所示。







这条直线有很多种画法，但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上 y 的最大值肯定是在 B 点取到，最小值肯定是在 A 点取到。很显然，B 点的纵坐标 $y = x$，A 点的纵坐标 $y = 0$。

所以当 $0 \leqslant x < 1$ 时，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

接下来要做的就是将 $\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的被积函数 $f(x,y)$ 显化为其不为 0 的段。对于本题而言，由于 $f(x,y) = \begin{cases} 1, 0 < y < 1, y < x < 2 - y \\ 0, \text{其他} \end{cases}$，不为 0 的段是 1，所以有

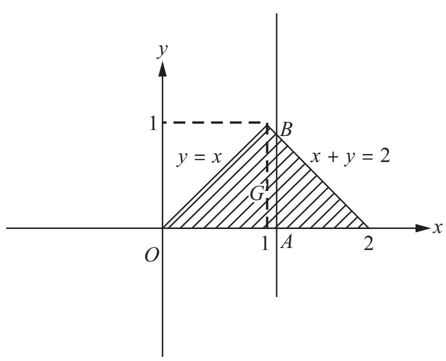
$$\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x 1\,\mathrm{d}y$$

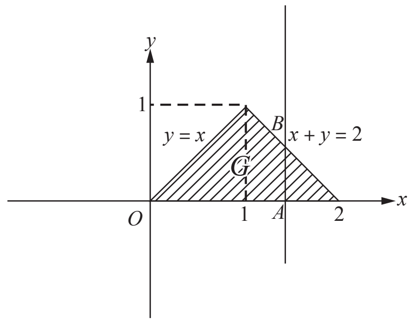
现在就剩下纯计算了。

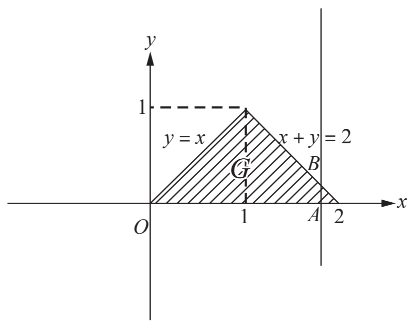
$$\int_0^x 1\,\mathrm{d}y = x$$

情况 2：当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时。

与 y 轴平行且和阴影区域相交的直线如下图所示。







这条直线有很多种画法，但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上 y 的最大值肯定是在 B 点取到，最小值肯定是在 A 点取到。很显然，B 点的纵坐标 $y = 2 - x$，A 点的纵坐标 $y = 0$。

所以当 $1 \leqslant x < 2$ 时，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

接下来要做的就是将 $\int_0^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的被积函数 $f(x,y)$ 显化为其不为 0 的段。对于本题而言，由于 $f(x,y) = \begin{cases} 1, 0 < y < 1, y < x < 2 - y \\ 0, 其他 \end{cases}$，不为 0 的段是 1，所以有

$$\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{x} 1\mathrm{d}y$$

现在就剩下纯计算了。

$$\int_0^{2-x} 1\mathrm{d}y = 2 - x$$

综合情况 1 和情况 2，有

$$f_X(x) = \begin{cases} x, 0 \leqslant x < 1 \\ 2 - x, 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求条件概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y)$，我们都知道“条件 $= \dfrac{联合}{边缘}$”，联合概率密度函

数已经知道了，所以现在要求边缘概率密度函数。这时有的同学可能会想：边缘概率密度函数不是第（Ⅰ）问已经求完了吗?第（Ⅰ）问的确求了边缘概率密度函数，但求的是随机变量 X 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$，而现在要求的是随机变量 Y 的边缘概率密度函数 $f_Y(y)$。

由于在第（Ⅰ）问中已经详细总结了“已知联合概率密度函数，求边缘概率密度函数”的方法，所以这里就不再详细讲解求 $f_Y(y)$ 的具体过程了。

通过计算可知，$f_Y(y)=\begin{cases}2-2y,0\leqslant y<1\\0,\text{其他}\end{cases}$。

综上所述，我们已经知道了联合概率密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}1,0<y<1,y<x<2-y\\0,\text{其他}\end{cases}$，也知道了边缘概率密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}2-2y,0\leqslant y<1\\0,\text{其他}\end{cases}$，所以条件概率密度函数为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y},0<y<1,y<x<2-y\\0,\text{其他}\end{cases}$$

2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题及精解

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 若$\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{x}-(\frac{1}{x}-a)e^x]=1$，则 a 等于(　　)。

(A)0

(B)1

(C)2

(D)3

解： $\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{x}-(\frac{1}{x}-a)e^x]$ 可以整理为

$$\lim_{x\to0}[\frac{1}{x}-(\frac{1}{x}-a)e^x]=\lim_{x\to0}(\frac{1-e^x}{x}+ae^x)\tag{1}$$

由于

$$\lim_{x\to0}[\frac{1}{x}-(\frac{1}{x}-a)e^x]=1\tag{2}$$

将(1) 式、(2) 式相结合，得

$$\lim_{x\to0}(\frac{1-e^x}{x}+ae^x)=1\tag{3}$$

很明显，$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1-e^x}{x}+ae^x)$ 可以拆为

$$\lim_{x\to0}(\frac{1-e^x}{x}+ae^x)=\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{x}+\lim_{x\to0}ae^x\tag{4}$$

将(3) 式、(4) 式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{x}+\lim_{x\to0}ae^x=1\tag{5}$$

由等价无穷小替换可知

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{x}=-1\tag{6}$$

由代入法可知

$$\lim_{x\to 0} a\mathrm{e}^{x} = a\mathrm{e}^{0} = a \tag{7}$$

把(6) 式、(7) 式代入(5) 式得

$$-1 + a = 1 \tag{8}$$

由(8) 式可解得 $a = 2$，所以本题应该选择(C) 选项。

（2）设 y_1，y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解，若常数 λ，μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则(　　)。

(A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$

(B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$

(C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$

(D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

解：由于 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是 $y' + p(x)y = q(x)$ 的解，所以将 $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ 代入 $y' + p(x)y$ 中，结果必然是 $q(x)$。

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= (\lambda y_1 + \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= \lambda[y'_1 + p(x)y_1] + \mu[y'_2 + p(x)y_2] \\ &= \lambda q(x) + \mu q(x) \\ &= (\lambda + \mu)q(x) \end{aligned}$$

即 $(\lambda + \mu)q(x) = q(x)$，由此可知：

$$\lambda + \mu = 1 \tag{1}$$

由于 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是 $y' + p(x)y = 0$ 的解，所以将 $y = \lambda y_1 - \mu y_2$ 代入 $y' + p(x)y$ 中，其结果必然是 0。

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= (\lambda y_1 - \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) \\ &= \lambda[y'_1 + p(x)y_1] - \mu[y'_2 + p(x)y_2] \\ &= \lambda q(x) - \mu q(x) \\ &= (\lambda - \mu)q(x) \end{aligned}$$

即 $(\lambda - \mu)q(x) = 0$，由此可知：

$$\lambda - \mu = 0 \tag{2}$$

将(1) 式、(2) 式相结合，得

$$\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda-\mu=0\end{cases}$$

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$。

本题应该选择(A)选项。

(3) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 具有二阶导数,且 $g''(x)<0$,若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值,则 $f[g(x)]$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是(　　)。

(A) $f'(a)<0$

(B) $f'(a)>0$

(C) $f''(a)<0$

(D) $f''(a)>0$

解:设 $F(x)=f[g(x)]$。本题问的是 $F(x)$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件。由一元函数求极值的方法可知:当 $F'(x_0)=0$ 和 $F''(x_0)<0$ 时,$F(x)$ 在 x_0 取极大值。

所以接下来的任务就是:看本题所给的四个选项中的哪个选项能够使得 $F'(x_0)=0$ 和 $F''(x_0)<0$ 同时成立。

由于 $F(x)=f[g(x)]$,所以有

$F'(x_0)=f[g(x)]'|_{x=x_0}=f'[g(x_0)]g'(x_0)=f'(a)g'(x_0)$

由于 $g(x_0)$ 是 $g(x)$ 的极值,所以有 $g'(x_0)=0$,$F'(x_0)=0$,现在只需要判断一下本题所给的四个选项中的哪个选项能够使得 $F''(x_0)<0$ 成立就可以了。

$F''(x_0)=f[g(x)]''|_{x=x_0}=f''[g(x_0)][g'(x_0)]^2+f'[g(x_0)]g''(x_0)=f'(a)g''(x_0)$

我们已经计算出了 $F''(x_0)=f'(a)\times g''(x_0)$,由于 $g''(x)<0$,所以 $g''(x_0)<0$,$F''(x_0)$ 与 $f'(a)$ 肯定是异号的。

所以,要让 $F''(x_0)<0$,只需 $f'(a)>0$ 就可以了,本题应该选择(B)选项。

(4) 设 $f(x)=\ln^{10}x$, $g(x)=x$, $h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时有(　　)。

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$

(B) $h(x)<g(x)<f(x)$

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$

(D) $g(x)<f(x)<h(x)$

解:先来计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$。

由于 $f(x)=\ln^{10}x$, $g(x)=x$,所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}=10\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{9}x}{x}=10\times9\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{8}x}{x}=\cdots=10!\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}<1$。把 1 写为 $\lim\limits_{x\to+\infty}1$，所以有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}<\lim\limits_{x\to+\infty}1$。根据函数极限的保号性，可知当 x 充分大时有 $\frac{f(x)}{g(x)}<1$，即 $f(x)<g(x)$。

再来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}$。

由于 $g(x)=x$，$h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}}=10\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}}=0$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=0$ 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}<1$。把 1 写为 $\lim\limits_{x\to+\infty}1$，所以有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}<\lim\limits_{x\to+\infty}1$。根据函数极限的保号性，可知当 x 充分大时有 $\frac{g(x)}{h(x)}<1$，即 $g(x)<h(x)$。

综上所述，当 x 充分大时，$f(x)<g(x)$ 且 $g(x)<h(x)$，即 $f(x)<g(x)<h(x)$。

所以本题应该选择(C)选项。

（5）设向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示。下列命题正确的是(　　)。

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关，则 $r\leqslant s$

(B) 若向量组 Ⅰ 线性相关，则 $r>s$

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关，则 $r\leqslant s$

(D) 若向量组 Ⅱ 线性相关，则 $r>s$

解：要想解答本题，一定要知道以下定理：

设有向量组 A 和向量组 B，向量组 A 中包含了 s 个向量，向量组 B 中包含了 t 个向量。

① 若向量组 B 可以由向量组 A 线性表出，且 $t>s$，则向量组 B 中包含的 t 个向量线性相关。

② 若向量组 B 可以由向量组 A 线性表出，且向量组 B 中包含的 t 个向量线性无关，则 $t\leqslant s$。

那么对于本题而言，由上述定理 ② 立刻可知本题应该选择(D)选项。

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则 A 相似于(　　)。

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

解: 有的同学可能不太明白为什么本题的四个选项所给的矩阵中有大片的空白，这是省略的写法，补充完整就是：(A) 选项 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，(B) 选项 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，(C) 选项 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，(D) 选项 $\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$。

四个选项有一个共同点：都是对角矩阵。所以本题的问题相当于：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似于以下哪个对角矩阵。

我们知道，若某矩阵可以相似于对角矩阵，那么对角矩阵的对角线上的数必然是该矩阵的特征值。所以，现在只需求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值即可。具体来说，分为以下四种情况。

情况 1：若求出的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1，1，1，0，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，本题应该选择(A) 选项。

情况 2：若求出的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1，1，-1，0，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，本题应该选择(B) 选项。

情况 3：若求出的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1，-1，-1，0，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，本题应该选择(C) 选项。

情况 4：若求出的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 -1，-1，-1，0，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就相似于 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，本题应该选择(D) 选项。

下面来求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

我们用 λ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由于 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，所以有 $\lambda^2+\lambda=0$，解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-1$。

由此可知，本题应该选择(D) 选项。下面再给大家解释一下为何矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的四个特征值是积 -1，-1，-1,0。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，秩为 3，我们知道，实对称矩阵有且仅有 $n-r$ 个特征值为 0。对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而言，$n=4$，$r=3$，所以 $n-r=4-3=1$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征值为 0。而刚才已经证明了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 0 或 -1，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的剩下三个特征值都是 -1，即特征值为 -1，-1，-1，0，所以本题应该选择(D) 选项。

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{2}, 0\leqslant x<1\\ 1-e^{-x}, x\geqslant 1\end{cases}$，则 $P\{X=1\}=($　　$)$。

(A) 0

(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{1}{2}-e^{-1}$

(D) $1-e^{-1}$

解: 本题已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{2}, 0\leqslant x<1\\ 1-e^{-x}, x\geqslant 1\end{cases}$，求随机变量 X 在某一点处的概率值 $P\{X=1\}$。

直接套公式 $P\{X=x_0\}=F(x_0)-\lim\limits_{x\to x_0^-}F(x)$ 来做即可。

$$P\{X=1\}=F(1)-\lim_{x\to 1^-}F(x) \tag{1}$$

由于 $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{2}, 0\leqslant x<1\\ 1-e^{-x}, x\geqslant 1\end{cases}$，所以

$F(1)=1-e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\dfrac{1}{2}$

将 $F(1)=1-e^{-1}$，$\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\dfrac{1}{2}$ 代入(1)式，得

$$P\{X=1\}=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1} \tag{2}$$

所以本题应该选择(C)选项。

（8）设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若$f(x)=\begin{cases}af_1(x),x\leqslant 0\\ bf_2(x),x>0\end{cases}$（$a>0,b>0$）为概率密度，则$a$，$b$应满足（　　）。

(A)$2a+3b=4$

(B)$3a+2b=4$

(C)$a+b=1$

(D)$a+b=2$

解：由于$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度，所以可知$f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$。

由于$f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，所以可知$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4},\ -1\leqslant x\leqslant 3\\ 0,其他\end{cases}$。

又因为$f(x=\begin{cases}af_1(x),x\leqslant 0\\ bf_2(x),x>0\end{cases}$，（$a>0,b>0$）所以有

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},x\leqslant 0\\ \dfrac{b}{4},0\leqslant x\leqslant 3\\ 0,x>3\end{cases}$$

$f(x)$为概率密度，我们知道，概率密度函数肯定都满足$-\infty$到$+\infty$的积分为1，所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1 \tag{1}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$可以拆为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x+\int_{3}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x+\int_{3}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1 \tag{3}$$

由于$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},x\leqslant 0\\ \dfrac{b}{4},0\leqslant x\leqslant 3\\ 0,x>3\end{cases}$，所以

$$\int_{\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{a}{2} \tag{4}$$

$$\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{3} \frac{b}{4} \mathrm{d}x = \frac{3}{4}b \tag{5}$$

$$\int_{3}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{3}^{+\infty} 0\mathrm{d}x = 0 \tag{6}$$

将(4)式、(5)式、(6)式代入(3)式，得

$$\frac{a}{2} + \frac{3}{4}b = 1 \tag{7}$$

将(7)式化简可得

$$2a + 3b = 4 \tag{8}$$

所以本题应该选择(A)选项。

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设可导函数 $y = y(x)$ 由方程$\int_0^{x+y} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x x\sin t^2 \mathrm{d}t$ 确定，则$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} =$ ________。

解： 本题求的是$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，要分以下两步走。

第一步是求出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，第二步才是求出最终的$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。下面就按照这个步骤来进行。

首先求出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

已知$\int_0^{x+y} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x x\sin t^2 \mathrm{d}t$，这个式子可以化为$\int_0^{x+y} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = x\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t$(因为是对 t 积分，所以 x 相当于常数，可以提到积分号之外)。

$\int_0^{x+y} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = x\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t$ 的等式左右两侧对 x 求导。

$\int_0^{x+y} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 对 x 求导得 $\mathrm{e}^{-(x+y)^2} \times (1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$，$x\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t$ 对 x 求导得$\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t + x\sin x^2$，所以有

$$\mathrm{e}^{-(x+y)^2} \times (1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) = \int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t + x\sin x^2$$

解得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{(x+y)^2}\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t + x\mathrm{e}^{(x+y)^2}\sin x^2 - 1$

下面来求出$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \mathrm{e}^{(0+y)^2}\int_0^0 \sin t^2 \mathrm{d}t + 0 \times \mathrm{e}^{(0+y)^2}\sin 0^2 - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$$

所以本题应填 -1。

（10）设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}(\mathrm{e}\leqslant x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________。

解： 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}(\mathrm{e}\leqslant x<+\infty)$ 的图虽然不好画，但这完全不影响解答本题。

由旋转体体积公式可知，G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi y^2\mathrm{d}x$，接下来只要计算出这个积分就可以了。

由于 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}(\mathrm{e}\leqslant x<+\infty)$，所以 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi y^2\mathrm{d}x$ 可以写为

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi y^2\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}\right)^2\mathrm{d}x \tag{1}$$

（1）式可以化简为

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\mathrm{d}x \tag{2}$$

令 $t=\ln x$，则相应的积分上限变为 $+\infty$，相应的积分下限变为 1，$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ 变为 $\mathrm{d}t$，所以有

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \tag{3}$$

通过计算可知

$$\pi\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{4} \tag{4}$$

将(3)式、(4)式相结合，得

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi y^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4} \tag{5}$$

所以本题应填 $\dfrac{\pi^2}{4}$。

（11）设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$________。

解： 这种与经济有关的题几乎每年数学三都会考一道，现在我告诉大家六句话，大家以后就用这六句话来解这类题。

第一句话：大家一定要知道收益 $R=PQ$；一定要知道利润 $I=PQ-C$(C 为成本)。

第二句话：大家一定要知道$\frac{EQ}{EP}=\frac{P}{Q}\times\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$或$\frac{EQ}{EP}=-\frac{P}{Q}\times\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$。具体来说：当需求弹性大于0 时，取负；当需求弹性小于0 时，取正。

第三句话：大家一定要知道收益对价格的弹性公式$\frac{ER}{EP}=\frac{P}{R}\times\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$，一定要知道收益对需求的弹性公式$\frac{ER}{EQ}=\frac{Q}{R}\times\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$。

第四句话：大家一定要知道$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$，一定要知道$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=P+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}$。

第五句话：大家一定要知道当边际收益等于边际成本时，利润最大。

第六句话：大家一定要知道边际成本的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q}$；一定要知道边际收益的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$；一定要知道边际利润的计算方法，即$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}Q}$。

现在来看本题。

由“第三句话”可知

$$\frac{ER}{EP}=\frac{P}{R}\times\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\tag{1}$$

而已知

$$\frac{ER}{EP}=1+P^3\tag{2}$$

(1) 式、(2) 式相结合，得

$$\frac{P}{R}\times\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=1+P^3\tag{3}$$

(3) 式很明显是一个一阶微分方程，用可分离变量法解此微分方程得通解为

$$\ln R=\frac{P^3}{3}+\ln P+C\tag{4}$$

已知 $R(1)=1$，代入(4) 式，可解得 $C=-\frac{1}{3}$，所以有

$$\ln R=\frac{P^3}{3}+\ln P-\frac{1}{3}\tag{5}$$

将(5) 式的等式左右两侧取对数，得

$$R=\mathrm{e}^{\frac{P3}{3}+\ln P-\frac{1}{3}}\tag{6}$$

(6) 式可以化简为

$$R=p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(P3-1)}\tag{7}$$

所以本题应填 $p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$。

（12）若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点$(-1,0)$，则 $b =$ ________。

解： 曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点$(-1,0)$，说明曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 过点$(-1,0)$，所以有$(-1)^3 + a\times(-1)^2 + b\times(-1) + 1 = 0$，化简得

$$a - b = 0 \tag{1}$$

由于 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$，所以 $y' = 3x^2 + 2ax + b$，$y'' = 6x + 2a$。由于$(-1,0)$是拐点，所以 $y''(-1) = 0$，即

$$-6 + 2a = 0 \tag{2}$$

将(1)式、(2)式联立，得方程组

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ -6 + 2a = 0 \end{cases}$$

解此方程组得 $a = 3$，$b = 3$。

所以本题应填3。

（13）设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}| = 3$，$|\boldsymbol{B}| = 2$，$|\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}| = 2$，则 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}| =$ ________。

解： 我们知道，矩阵 $\boldsymbol{E}$ 乘以任何矩阵都等于该矩阵本身，所以有

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E} \tag{1}$$

而 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{E}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}$ 可以变为

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}) \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}) \tag{3}$$

而$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})$很明显可以写为

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} \tag{4}$$

将(3)式、(4)式相结合，得

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} \tag{5}$$

由于矩阵乘法满足分配律，所以有

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A} \tag{6}$$

将(5)式、(6)式相结合，得

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A} \tag{7}$$

由于矩阵加法满足交换律，所以有

$$\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{A} \tag{8}$$

将(7)式、(8)式相结合，得

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} \tag{9}$$

将(9)式的等式左右两侧取绝对值，得

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}| \tag{10}$$

$|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}|$可以拆为

$$|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}^{-1}|\times|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|\times|\boldsymbol{A}| \tag{11}$$

将(10)式、(11)式相结合，得

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}|\times|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|\times|\boldsymbol{A}| \tag{12}$$

因为$|\boldsymbol{B}|=2$，所以$|\boldsymbol{B}^{-1}|=\dfrac{1}{2}$。把$|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}^{-1}|=\dfrac{1}{2}$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$代入(12)式，得

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3 \tag{13}$$

所以本题应填3。

(14)设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$的简单随机样本，记统计量$T=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，则$ET=$ ________。

解：由于$T=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，所以

$$ET=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2) \tag{1}$$

$E(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2)$可以改写为

$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2 \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得

$$ET=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2 \tag{3}$$

把(3)式的等式右侧的“$\sum$”展开得

$$\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=E(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2) \tag{4}$$

将(3)式、(4)式相结合，得

$$ET=\frac{1}{n}E(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2) \tag{5}$$

(5)式可以展开为

$$ET = \frac{1}{n}[E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_n^2)] \tag{6}$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自同一总体的样本，它们的平方数学期望都等于总体 X 的平方的数学期望，所以(6) 式可以写为

$$ET = \frac{1}{n}[E(X^2) + E(X^2) + \cdots + E(X^2)] \tag{7}$$

(7) 式可以化简为

$$ET = \frac{1}{n} \times n \times E(X^2) = E(X^2) \tag{8}$$

总体 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)(\sigma > 0)$，所以 $E(X) = \mu$，$D(X) = \sigma^2$，而 $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$，所以有

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 \tag{9}$$

将(8) 式、(9) 式相结合，得

$$ET = \sigma^2 + \mu^2 \tag{10}$$

所以本题应填 $\sigma^2 + \mu^2$。

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$。

解：将 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$ 写为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}} &= \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)\frac{1}{\ln x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}\end{aligned}$$

由此可知，只需计算出极限值 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}$ 就完成了。

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}$ 是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的函数极限，所以可以对其使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}} - 1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \tag{1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x}}$ 可以化简为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)} \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)} \tag{3}$$

根据等价无穷小替换原则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\times\dfrac{\ln x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x} \tag{4}$$

将(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x} \tag{5}$$

由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=-1 \tag{6}$$

将(5)式、(6)式相结合，得

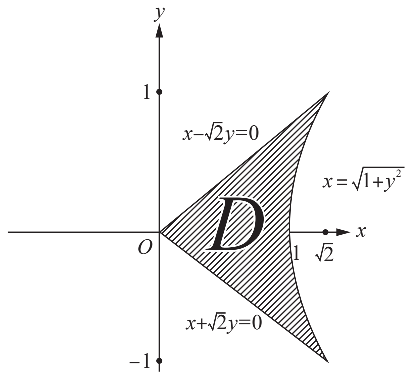
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}=-1 \tag{7}$$

所以本题的答案为 e^{-1}。

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成。

解： 首先，在平面直角坐标系中画出由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成的积分区域 D(提示：$x+\sqrt{2}y=0$ 和 $x-\sqrt{2}y=0$ 都是过原点的直线，而 $x=\sqrt{1+y^2}$ 则是双曲线的右支)，如下图所示。



由于$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$，所以有

$$\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

$\iint\limits_D (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$很明显可以写为

$$\iint\limits_D (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (x^3+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D (3x^2y+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得

$$\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (x^3+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D (3x^2y+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

由于积分区域D是关于x轴对称的，且$\iint\limits_D (3x^2y+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的被积函数关于$y$是奇函数，所以根据二重积分的对称性可知

$$\iint\limits_D (3x^2y+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{4}$$

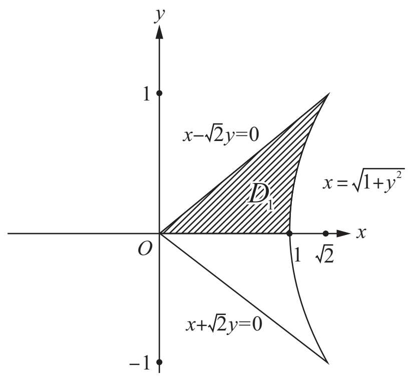
将(3)式、(4)式相结合，得

$$\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (x^3+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5}$$

由于积分区域D是关于x轴对称的，且$\iint\limits_D (x^3+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的被积函数关于$y$是偶函数，所以根据二重积分的对称性可知

$$\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} (x^3+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6}$$

其中区域D_1如下图所示。



由上图来确定积分上下限，具体来说：

$$2\iint\limits_{D_1}(x^3+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}(x^3+3xy^2)\mathrm{d}x \tag{7}$$

将(6)式、(7)式相结合，得

$$\iint\limits_{D}(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}(x^3+3xy^2)\mathrm{d}x \tag{8}$$

通过计算可知

$$2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}(x^3+3xy^2)\mathrm{d}x=\frac{14}{15} \tag{9}$$

将(8)式、(9)式相结合，得

$$\iint\limits_{D}(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{14}{15} \tag{10}$$

(17)(本题满分10分)

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值。

解：本题很明显属于条件极值问题，鉴于有一部分同学还不知道求解条件极值的题的方法，我就给大家总结一下。

第一步：把题中所给的附加条件整理为一侧为0的形式。

第二步：作拉格朗日函数“$L=$题中让求极值的那个式子的等式右侧$+\lambda\times$(第一步整理完的不为0的那一侧)”。

第三步：L 分别对题中让求极值的那个式子的等式右侧中出现的每一个变量求偏导。

第四步：令第三步求出的每一个偏导数为0，再加上题中所给的条件，这些方程共同组成一个方程组。

第五步：解此方程组即可得极值点。

第六步：算出第五步求得的极值点所对应的极值就可以了。

下面就按照这六个步骤来做。

第一步：把题中所给的附加条件整理为一侧为 0 的形式。

对于本题而言，题中所给的附加条件是 $x^2+y^2+z^2=10$，把它整理为 $x^2+y^2+z^2-10=0$ 或者 $10-x^2-y^2-z^2=0$ 都行，这里就整理成前者吧。

第二步：作拉格朗日函数"$L=$ 题中让求极值的那个式子的等式右侧 $+\lambda\times$(第一步整理完的不为 0 的那一侧)"。

对于本题而言，由于求极值的等式右侧是 $xy+2yz$，且第一步整理完的不为 0 的那一侧是 $x^2+y^2+z^2-10$，所以拉格朗日函数为

$L(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$。

第三步：L 分别对题中求极值的等式右侧的每一个变量求偏导。

对于本题而言，由于求极值的等式右侧是 $xy+2yz$，也就是说，等式右侧出现了变量 x、y、z。所以我们让 L 分别对 x、y、z 求偏导，即

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+2\lambda x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=x+2z+2\lambda y$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=2y+2\lambda z$$

第四步：令第三步求出的每一个偏导数为 0，再加上附加条件，组成一个方程组。

对于本题而言，令第三步求出的每一个偏导数为 0，即

$y+2\lambda x=0$

$x+2z+2\lambda y=0$

$2y+2\lambda z=0$

附加条件是 $x^2+y^2+z^2=10$，所以有方程组

$$\begin{cases}y+2\lambda x=0\\x+2z+2\lambda y=0\\2y+2\lambda z=0\\x^2+y^2+z^2=10\end{cases}$$

第五步：解此方程组即可得极值点。

对于本题而言，就是解方程组$\begin{cases}y+2\lambda x=0\\x+2z+2\lambda y=0\\2y+2\lambda z=0\\x^2+y^2+z^2=10\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=1\\y=-\sqrt{5}\\z=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{5}\\z=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1\\y=-\sqrt{5}\\z=-2\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1\\y=\sqrt{5}\\z=-2\end{cases}$。

第六步：算出第五步求得的极值点所对应的极值即可。

第五步一共算出了四个点，那怎么办？很简单，那就把四个值都算出来，比较一下哪个最大即可。

将$\begin{cases} x=1 \\ y=-\sqrt{5} \\ z=2 \end{cases}$代入$xy+2yz$中，得$-5\sqrt{5}$；

将$\begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{5} \\ z=2 \end{cases}$代入$xy+2yz$中，得$5\sqrt{5}$；

将$\begin{cases} x=-1 \\ y=-\sqrt{5} \\ z=-2 \end{cases}$代入$xy+2yz$中，得$5\sqrt{5}$；

将$\begin{cases} x=-1 \\ y=\sqrt{5} \\ z=-2 \end{cases}$代入$xy+2yz$中，得$-5\sqrt{5}$。

四个值中，最大值为$5\sqrt{5}$，最小值为$-5\sqrt{5}$。

(18)（本题满分 10 分）

（Ⅰ）比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$与$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$的大小，说明理由；

（Ⅱ）记$u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$。

解：本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

第（Ⅰ）问是比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$与$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$的大小，这两个积分的积分上下限都一样，所以只需比较被积函数的大小就可以了（当然，被积函数中的t的取值范围是$0<t<1$，因为积分上下限是 1 和 0）。

大家都知道，当$0<t<1$时，必有$0<\ln(1+t)<t$。所以当$0<t<1$时，必有$[\ln(1+t)]^n<t^n$。而$|\ln t|>0$，所以当$0<t<1$时，必有$[\ln(1+t)]^n|\ln t|<t^n|\ln t|$。因此有$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$。

再来看第（Ⅱ）问。

$u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$，由于积分下限小于积分上限（即$0<1$）并且被积函数在区

间(0,1) 上大于0，所以很明显有

$$u_n > 0 \tag{1}$$

第(Ⅰ)问已经证明了

$$u_n < \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得

$$0 < u_n < \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t \tag{3}$$

现在将$\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t$计算出来。

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t &= -\int_0^1 t^n \ln t \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln t \mathrm{d}(t^{n+1}) \\ &= -\frac{1}{n+1} t^{n+1}\ln t \Big|_{0^+}^{1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

所以(3)式可以变为

$$0 < u_n < \frac{1}{(n+1)^2} \tag{4}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0$，根据夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

(19)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在[0,3]上连续，在(0,3)内存在二阶导数，且$2f(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = f(2) + f(3)$

(Ⅰ)证明存在$\eta \in (0,2)$，使$f(\eta) = f(0)$；

(Ⅱ)证明存在$\xi \in (0,3)$，使$f''(\xi) = 0$。

解：先来看第一问。

已知$2f(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，等式两侧同时乘以$\frac{1}{2}$，得

$$f(0) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

下面给大家介绍一个定理。

积分中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ 使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$。

对于本题而言，在区间 $[0,2]$ 上对 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ 使用积分中值定理，得：

存在一点 $\eta \in (0,2)$，使得

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2f(\eta) \tag{2}$$

等式两侧同时乘以 $\frac{1}{2}$，得

$$\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = f(\eta) \tag{3}$$

将(1)式、(3)式相结合，得

$$f(\eta) = f(0) \tag{4}$$

再来看第(Ⅱ)问。

分两种情况。

情况1：若 $f(2) = f(3)$。

由于 $2f(0) = f(2) + f(3)$，所以可知 $f(0) = f(2) = f(3)$。

由于 $f(0) = f(2)$，在区间 $[0,2]$ 上对函数 $f(x)$ 使用罗尔定理得：在 $(0,2)$ 上存在一点 ξ_1 使得 $f'(\xi_1) = 0$。

由于 $f(2) = f(3)$，在区间 $[2,3]$ 上对函数 $f(x)$ 使用罗尔定理得：在 $(2,3)$ 上存在一点 ξ_2 使得 $f'(\xi_2) = 0$。

现在已经证明出了 $f'(\xi_1) = 0$ 和 $f'(\xi_2) = 0$，而且由于 ξ_1 是在区间 $(0,2)$ 上的，ξ_2 是在区间 $(2,3)$ 上的，所以 ξ_1 和 ξ_2 肯定不是同一个点。现在在区间 (ξ_1,ξ_2) 上对函数 $f'(x)$ 使用罗尔定理得：在 (ξ_1,ξ_2) 上存在一点 ξ 使得 $f''(\xi) = 0$。

情况2：若 $f(2) \neq f(3)$。

由于 $f(2) \neq f(3)$，所以或者是 $f(2) < f(3)$，或者是 $f(3) < f(2)$。但是 $\frac{1}{2}[f(2) + f(3)]$ 肯定是介于 $f(2)$、$f(3)$ 之间的。

由连续函数介值定理可知，在区间 $(2,3)$ 上，肯定存在一点 $\bar{\eta}$，使得

$$f(\bar{\eta}) = \frac{1}{2}[f(2) + f(3)] \tag{5}$$

由于 $2f(0) = f(2) + f(3)$，所以有

$$f(0) = \frac{1}{2}[f(2) + f(3)] \tag{6}$$

将(4)式、(5)式、(6)式相结合，得 $f(0) = f(\eta) = f(\bar{\eta})$，其中 η 是属于区间 $(0,2)$

的，$\overline{\eta}$ 是属于区间 $(2,3)$ 的。

由于 $f(0)=f(\eta)$，在区间 $[0,\eta]$ 上对函数 $f(x)$ 使用罗尔定理得：在 $(0,\eta)$ 上存在一点 ξ_1 使得 $f'(\xi_1)=0$。

由于 $f(\eta)=f(\overline{\eta})$，在区间 $[\eta,\overline{\eta}]$ 上对函数 $f(x)$ 使用罗尔定理得：在 $(\eta,\overline{\eta})$ 上存在一点 ξ_2 使得 $f'(\xi_2)=0$。

现在已经证明出了 $f'(\xi_1)=0$ 和 $f'(\xi_2)=0$，而且由于 ξ_1 是在区间 $(0,\eta)$ 上的，ξ_2 是在区间 $(\eta,\overline{\eta})$ 上的，所以 ξ_1 和 ξ_2 肯定不是同一个点。现在在区间 (ξ_1,ξ_2) 上对函数 $f'(x)$ 使用罗尔定理得：在 (ξ_1,ξ_2) 上存在一点 ξ 使得 $f''(\xi)=0$。

综上所述，无论情况 1 还是情况 2，都有：存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$。

（20）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$。已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 存在 2 个不同的解。

（Ⅰ）求 λ，a；

（Ⅱ）求方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 的通解。

解：本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 存在 2 个不同的解，由于 $\vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，所以很显然线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 是一个非齐次方程组。

对于非齐次方程组而言，它的解的类型一共有三种：无解、有唯一的一组解、有无穷多组解。已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 存在 2 个不同的解，这就意味着非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 有无穷多组解。

非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 的方程个数很显然等于未知数的个数（因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个方阵），所以可以使用克拉默法则。

由克拉默法则可知：

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 有唯一的一组解。

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 有无穷多组解或无解。

而刚才已经推出了非齐次方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多组解，所以根据克拉默法则可得 $|\boldsymbol{A}|=0$。

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$ 就意味着 $\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0$，解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$。但是必须舍去一个 λ，因为 $|\boldsymbol{A}|=0$ 对应着非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 有无穷多组解或无解，也就是说，其中一个 λ 对应非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 有无穷多组解，另一个 λ 对应非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 无解。已知非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 有无穷多组解，所以应该舍去一个 λ。那么应该舍去的究竟是 $\lambda=1$ 还是 $\lambda=-1$ 呢?我们继续来看。

若 $\lambda=1$，则非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 所对应的矩阵形式为 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$。矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 所化的阶梯型矩阵是 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，显然有 $r(\boldsymbol{A})=1$，$r(\boldsymbol{A}\mid\vec{\boldsymbol{b}})=2$，即 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\mid\vec{\boldsymbol{b}})$，所以当 $\lambda=1$ 时，非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 无解。所以应该舍去 $\lambda=1$，而取 $\lambda=-1$。

现在第(Ⅰ)问做完了吗?还没有。第(Ⅰ)问是求 λ 和 a，现在只求出了 $\lambda=-1$，接下来求 a。

由于 $\lambda=-1$，所以非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 所对应的矩阵形式为 $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 所化的阶梯型矩阵是 $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{pmatrix}$。由于非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 有无穷多组解，所以必有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\vec{\boldsymbol{b}})$。显然 $r(\boldsymbol{A})=2$，必有 $r(\boldsymbol{A}\mid\vec{\boldsymbol{b}})=2$，所以很明显有 $a+2=0$，即 $a=-2$。

第(Ⅰ)问就做完了，$\lambda=-1$，$a=-2$。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 的通解，我们已经求出了 λ 和 a，所以非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 中已经不含参数了，所以第(Ⅱ)问很简单，只需要按照求解非齐次方程组通解的步骤做就可以了。

鉴于一部分同学忘记了求解非齐次方程组通解的步骤，下面来复习一下。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩 r_1、r_2。

（2）判断解的类型。具体的判断方法如下：

① 若 $r_1 \neq r_2$，则该非齐次方程组无解。

② 若 $r_1 = r_2$ 且 $r_1 = r_2 = n$（未知数个数），则该非齐次方程组有唯一的解，不用再进行步骤(3)了。

③ 若 $r_1 = r_2$ 且 $r_1 = r_2 < n$（未知数个数），则该非齐次方程组有无穷多解，需要进行步骤(3)。

（3）先当成对应的齐次方程组，按齐次方程组的步骤(3)求出齐次方程组的通解。然后再还原成非齐次方程组，令自由未知数全取零，求出非齐次方程组的一个特解。最后，用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解，得到的就是非齐次方程组的通解。

按照这三个步骤就可以求出非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ 的通解。这里公布一下答案：非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ 的通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数。

（21）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵。若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，求 a，Q。

解：本题有两问，第（Ⅰ）问求 a，第（Ⅱ）问求矩阵 Q。

先来看第（Ⅰ）问。

矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$。由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵。

对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而言，有 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$。这叫“实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角矩阵”。

那么，当实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角矩阵时，$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 该如何求呢?有两种求法，一是“特征向量单位正交化来求 $\boldsymbol{Q}$，通过求特征值来求 $\boldsymbol{\Lambda}$”，二是“配方法”。

已知矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，所以本题中出现的 $\boldsymbol{Q}$ 是通过“特征向量单位正交化”（而不是通过配方法）来求的。

设 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，很明显向量 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 是特征值 λ_1 所对应的特征向量。

下面告诉大家一个定理：若向量 $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ 是特征值 λ 所对应的特征向量，则向量 $k\vec{\boldsymbol{\xi}}(k\neq 0)$ 肯定也是特征值 λ 所对应的特征向量。

所以对于本题而言，可以知道 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 是特征值 λ_1 所对应的特征向量。

根据特征值、特征向量的定义式有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$。

把 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 按照矩阵乘法法则展开就是

$$\begin{cases}0+(-2)+4=\lambda_1\\ -1+6+a=2\lambda_1\\ 4+2a+0=\lambda_1\end{cases}$$

解得 $a=-1$，$\lambda_1=2$。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求矩阵 $\boldsymbol{Q}$，先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值。由于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，而刚才已经求出 $a=-1$，所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}$，

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}$。令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，则有 $(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4)=0$，解得

$$\begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_2=5\\ \lambda_3=-4\end{cases}$$

下面分别求一下每个特征值所对应的特征向量(其实求解特征向量的方法就是解齐次线性方程组的方法)。

通过计算可知，特征值 $\lambda_1 = 2$ 所对应的所有特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(k_1 \neq 0)$，特征值 $\lambda_2 = 5$ 所对应的所有特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $(k_2 \neq 0)$，特征值 $\lambda_3 = -4$ 所对应的所有特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $(k_3 \neq 0)$。

现在从特征值 $\lambda_1 = 2$ 所对应的无数个特征向量中选一个，不妨选 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$；再从特征值 $\lambda_2 = 5$ 所对应的无数个特征向量中选一个，不妨选 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$；再从特征值 $\lambda_3 = -4$ 所对应的无数个特征向量中选一个，不妨选 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$。

下面要做的就是把向量 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 进行单位正交化。由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，而对称矩阵不同特征值所对应的特征向量本来就是正交的，所以不用进行“正交化”了，只需进行“单位化”即可。

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\vec{\boldsymbol{a}}_1,\vec{\boldsymbol{a}}_2,\vec{\boldsymbol{a}}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$。

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$。

解：本题有两问，第(Ⅰ)问是求常数 A，第(Ⅱ)问是求条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y\mid x)$。

先来看第(Ⅰ)问。

对于二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$ 而言，必有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1 \tag{1}$$

而已知

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2} \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1 \tag{3}$$

由于 A 是常数，很显然可以提到最前面，所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

将(3)式、(4)式相结合，得

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1 \tag{5}$$

很显然，$\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}$ 可以写为

$$\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}=\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{e}^{-x^2} \tag{6}$$

将(6)式代入(5)式，得

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\times\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1 \tag{7}$$

利用“先 y 后 x 法”来表示二重积分 $A\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\times\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\times\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\times\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}y \tag{8}$$

将(7)式、(8)式相结合，得

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\times\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}y=1 \tag{9}$$

由于内层是对“y”进行积分，所以 e^{-x^2} 就相当于是数，所以可以把 e^{-x^2} 提到内层的积分号之外，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\times\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y \tag{10}$$

将(9)式、(10)式相结合，得

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=1 \tag{11}$$

下面来计算一下内层的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y$。

由于这是对“y”进行积分，所以 x 相当于是数，而我们知道“d”的后面可以任意加减一个数，所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}(y-x) \tag{12}$$

现在令 $u=y-x$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}(y-x)$ 变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}(y-x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \tag{13}$$

将(12)式、(13)式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \tag{14}$$

下面是一个公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi} \tag{15}$$

将(14)式、(15)式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=\sqrt{\pi} \tag{16}$$

将(11)式、(16)式相结合，得

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sqrt{\pi}\mathrm{d}x=1 \tag{17}$$

由于 $\sqrt{\pi}$ 是常数，可以提到最前面，所以有

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sqrt{\pi}\mathrm{d}x=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{18}$$

将(17)式、(18)式相结合，得

$$A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=1 \tag{19}$$

根据(15)式可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{20}$$

将(19)式、(20)式相结合，得

$$A \times \sqrt{\pi} \times \sqrt{\pi} = 1 \tag{21}$$

将(21)式化简得

$$A\pi = 1 \tag{22}$$

由(22)式可以解得

$$A = \frac{1}{\pi} \tag{23}$$

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求条件概率密度函数$f_{Y|X}(y \mid x)$。这必须知道联合概率密度函数$f(x,y)$，还要知道边缘概率密度函数$f_X(x)$。联合概率密度函数$f(x,y)$为$f(x,y) = \frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}$，所以现在要求的就是边缘概率密度函数$f_X(x)$。

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \tag{24}$$

而已知

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2} \tag{25}$$

将(24)式、(25)式相结合，得

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2} dy \tag{26}$$

由于$\frac{1}{\pi}$是常数，可以提到最前面，所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2} dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy \tag{27}$$

将(26)式、(27)式相结合，得

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy \tag{28}$$

很显然，$e^{-2x^2+2xy-y^2}$可以写为

$$e^{-2x^2+2xy-y^2} = e^{-(y-x)^2}e^{-x^2} \tag{29}$$

将(29)式代入(28)式，得

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2}e^{-x^2} dy \tag{30}$$

由于这是对“y”进行积分，e^{-x^2}就相当于是数，所以可以把e^{-x^2}提到积分号之外，即

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2}e^{-x^2} dy = \frac{1}{\pi} \times e^{-x^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \tag{31}$$

将(30) 式、(31) 式相结合，得

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\times \mathrm{e}^{-x^2}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y \tag{32}$$

由于这是对“y”进行积分，x 相当于是数，而我们知道“d”后面可以任意加减一个数，所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}(y-x) \tag{33}$$

令 $u=y-x$，则$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}(y-x)$ 变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}(y-x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \tag{34}$$

将(33) 式、(34) 式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \tag{35}$$

下面是一个公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi} \tag{36}$$

将(35) 式、(36) 式相结合，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=\sqrt{\pi} \tag{37}$$

将(37) 式代入(32) 式，得

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\times \mathrm{e}^{-x^2}\times\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} \tag{38}$$

现在已经计算出了$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$，而已知$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}$，所以

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}。$$

(23)（本题满分 11 分）

箱中装有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为1、2、3 个。现从箱中随机取出2 个球，记 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数。

（Ⅰ）求随机变量(X,Y) 的概率分布。

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

解：本题有两问，第（Ⅰ）问是求随机变量(X,Y) 的概率分布，第（Ⅱ）问是求随机变量 X 与随机变量 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问问的是概率分布,“概率分布”这指的其实就是“分布律”,我们知道分布律是一张表格,所以这第(Ⅰ)问只需要画出一张表格即可。

由于随机变量 X 表示的是两次中取出的红球个数,一共只有1个红球,所以 X 可以取0和1。由于随机变量 Y 表示的是两次中取出的白球个数,一共有2个白球,所以 Y 可以取0和1。

现在可以先把表格的表头部分画出来,即

X \ Y	0	1	2
0			
1			

任务就是求出 $P(X=0,Y=0)$、$P(X=0,Y=1)$、$P(X=0,Y=2)$、$P(X=1,Y=0)$、$P(X=1,Y=1)$、$P(X=1,Y=2)$。

先来求 $P(X=0,Y=0)$。$P(X=0,Y=0)$ 表示的是两次中取到两个黑球的概率,所以 $P(X=0,Y=0)=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{15}$。

再来求 $P(X=0,Y=1)$。$P(X=0,Y=1)$ 表示的是两次中取到1个白球和1个黑球的概率,所以 $P(X=0,Y=1)=\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{6}{15}$。

再来求 $P(X=0,Y=2)$。$P(X=0,Y=2)$ 表示的是两次中取到两个白球的概率,所以 $P(X=0,Y=2)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$。

再来求 $P(X=1,Y=0)$。$P(X=1,Y=0)$ 表示的是两次中取到1个红球和1个黑球的概率,所以 $P(X=1,Y=0)=\dfrac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{3}{15}$。

再来求 $P(X=1,Y=1)$。$P(X=1,Y=1)$ 表示的是两次中取到1个红球和1个白球的概率,所以 $P(X=1,Y=1)=\dfrac{C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{2}{15}$。

最后来求 $P(X=1,Y=2)$。$P(X=1,Y=2)$ 表示的是两次中取到1个红球和2个白球的概率。既然一共只取了两次,怎么可能取出三个球呢?所以很明显有 $P(X=1,Y=2)=0$。

综上所述,$P(X=0,Y=0)=\dfrac{3}{15}$,$P(X=0,Y=1)=\dfrac{6}{15}$,$P(X=0,Y=2)=\dfrac{1}{15}$,$P(X=1,Y=0)=\dfrac{3}{15}$,$P(X=1,Y=1)=\dfrac{2}{15}$,$P(X=1,Y=2)=0$。所以有

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是求随机变量 X 与随机变量 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

由于 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$，所以只需计算出 $E(X)$、$E(Y)$、$E(XY)$ 即可。

先来计算 $E(X)$。

首先必须知道随机变量 X 的边缘分布律。由于联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0

所以随机变量 X 的边缘分布律为

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

再来计算 $E(Y)$。

必须知道随机变量 Y 的边缘分布律。由于联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0

所以随机变量 Y 的边缘分布律为

Y	0	1	2
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$E(Y) = 0 \times \frac{6}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

最后来计算 $E(XY)$。

必须知道随机变量 XY 的边缘分布律。由于联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0

所以随机变量 XY 的边缘分布律为

XY	0	1	2
P	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0

$$E(XY) = 0 \times \frac{13}{15} + 1 \times \frac{2}{15} + 2 \times 0 = \frac{2}{15}$$

综上所述，$E(X) = \frac{1}{3}$，$E(Y) = \frac{2}{3}$，$E(XY) = \frac{2}{15}$。代入 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ 中，得

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{2}{15} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{45}$$

2009年全国硕士研究生入学统一考试试题及精解

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为（　　）。

（A）1

（B）2

（C）3

（D）无穷多个

解：我们知道，函数 $y=\sin\pi x$ 在 $x=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ 处的函数值是0，而对于一个分数而言，0是不能做分母的，所以 $x=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ 都是函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的间断点。也就是说，函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的间断点有无数个。

本题问的是函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数，所以要看一下在这无数个间断点中到底有几个是可去间断点。

进行如下计算。

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\infty$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\infty$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\frac{x - x^3}{\sin\pi x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x - x^3}{\sin\pi x} = \infty$$

$$\vdots$$

由以上计算可知，函数$f(x) = \dfrac{x - x^3}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数为3（分别是$x = 0$，$x = -1$，$x = 1$），所以本题应该选择（C）选项。

（2）当$x\to 0$时，$f(x) = x - \sin ax$与$g(x) = x^2\ln(1 - bx)$是等价无穷小，则（　　）。

（A）$a = 1$，$b = -\dfrac{1}{6}$

（B）$a = 1$，$b = \dfrac{1}{6}$

（C）$a = -1$，$b = -\dfrac{1}{6}$

（D）$a = -1$，$b = \dfrac{1}{6}$

解：先来关注一下$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$这个式子。由于$f(x) = x - \sin ax$，$g(x) = x^2\ln(1 - bx)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin ax}{x^2\ln(1 - bx)} \tag{1}$$

由等价无穷小可知，当$x\to 0$时，$\ln(1 - bx)$和$-bx$是等价无穷小，所以（1）式可以化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin ax}{x^2\ln(1 - bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin ax}{x^2\times(-bx)} \tag{2}$$

（2）式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin ax}{x^2\ln(1 - bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin ax}{-bx^3} \tag{3}$$

将（1）式、（3）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin ax}{-bx^3} \tag{4}$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}(x - \sin ax) = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}(-bx^3) = 0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin ax}{-bx^3}$属于“$\dfrac{0}{0}$型”的函数极限计算题，可以使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2} \tag{5}$$

将(4) 式、(5) 式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2} \tag{6}$$

题中说当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \tag{7}$$

将(6) 式、(7) 式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=1 \tag{8}$$

下面给大家介绍一个定理。

在“$\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{g(x)}=$ 非零常数 C”这大前提下：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$；若 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$。

现在来看(8) 式。由于(8) 式的等式右侧是非零常数 1，又 $\lim\limits_{x\to 0}(-3bx^2)=0$，根据上述定理可知 $\lim\limits_{x\to 0}(1-a\cos ax)=0$，由此可以解得 $a=1$。

把 $a=1$ 代入(8) 式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=1 \tag{9}$$

由等价无穷小可知，当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 和 $\frac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小，所以(9) 式可以化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}=1 \tag{10}$$

(10) 式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{-3b}=1 \tag{11}$$

由于 $\frac{\frac{1}{2}}{-3b}$ 是常数，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{-3b}=\frac{\frac{1}{2}}{-3b} \tag{12}$$

将(11) 式、(12) 式相结合，得

$$\frac{\frac{1}{2}}{-3b}=1 \tag{13}$$

由(13)式立刻可以解得 $b=-\frac{1}{6}$。

现在已经计算出了 $a=1$，$b=-\frac{1}{6}$，所以本题应该选择（A）选项。

（3）使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t > \ln x$ 成立的 x 的范围是(　　)。

（A）$(0,1)$

（B）$(1,\frac{\pi}{2})$

（C）$(\frac{\pi}{2},\pi)$

（D）$(\pi,+\infty)$

解：先设一个辅助函数，设 $F(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\ln x$，那么定义域就肯定是$(0,+\infty)$。

现在来求 $F'(x)$。由于 $F(x)=\int_x^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\ln x$，所以 $F'(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{x}$，整理可得 $F'(x)=-\frac{1-\sin x}{x}$。

由于 $F'(x)=-\frac{1-\sin x}{x}$，所以有如下结论成立：

① 当 $x>0$ 且 $x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$F'(x)<0$。

② 当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时(其中 $k=0,1,2,\cdots$)时，$F'(x)=0$。

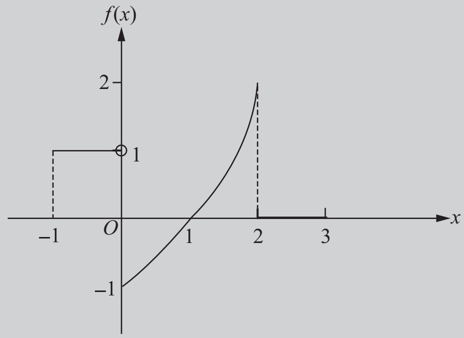
结论①说的是"当 $x>0$ 且 $x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时"，结论②说的是"当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时(其中 $k=0,1,2,\cdots$)时"，这两者综合起来就是"$x>0$ 时"。

综上所述，由于 $x>0$ 时 $F'(x)\leqslant 0$ 且在任意区间内不取等号，这说明函数 $F(x)$ 在区间$(0,+\infty)$内严格单调减少。所以函数 $F(x)$ 在区间$(0,1)$内就必然严格单调减少。

由于设的是 $F(x)=\int_x^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\ln x$，所以 $F(1)=0$。由于 $F(1)=0$ 且函数 $F(x)$ 在区间$(0,1)$内严格单调减少，所以在区间$(0,1)$内，$F(x)>F(1)=0$。

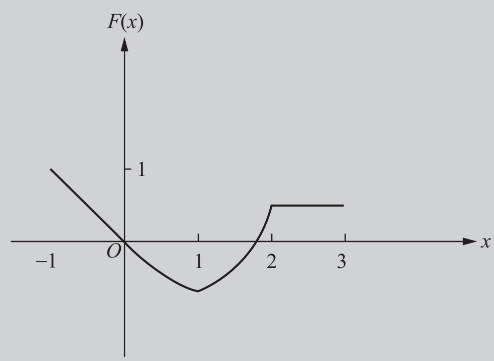
由于在区间$(0,1)$内，有 $F(x)>0$ 且设的是 $F(x)=\int_x^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\ln x$，所以有如下结论成立：在区间$(0,1)$内，$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$。本题应该选择（A）选项。

（4）设函数 $y=f(x)$ 在区间$[-1,3]$上的图形为

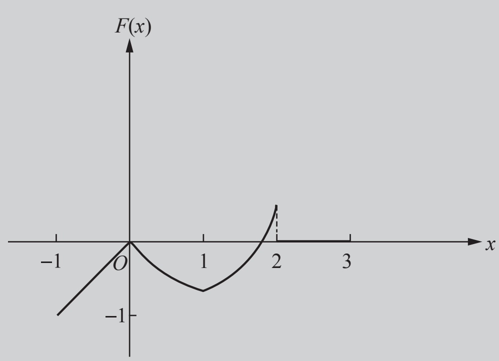


则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的图形为(　　)。

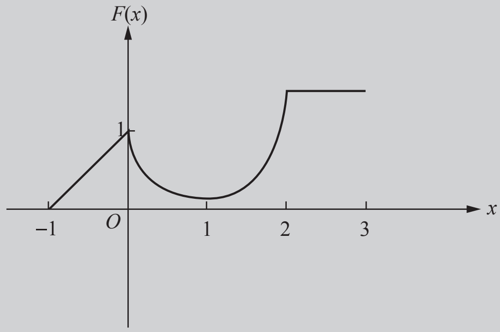
（A）



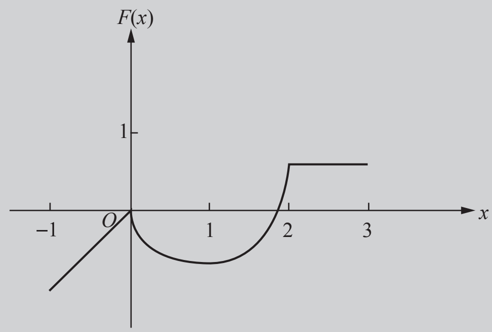
（B）



(C)

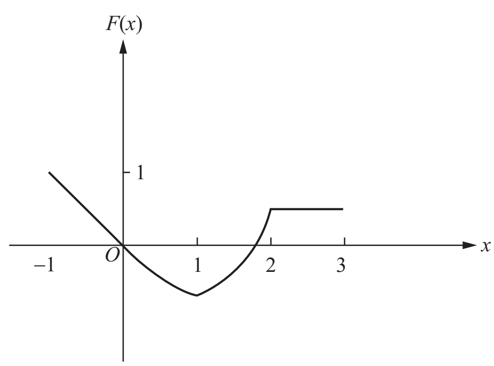


(D)



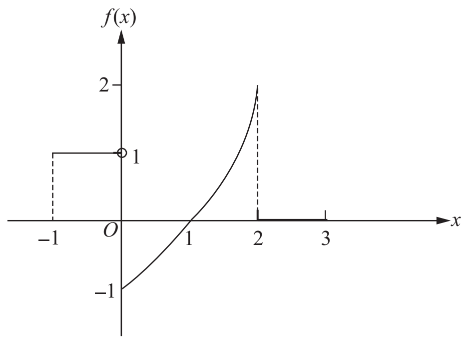
解: 在正式开始做本题之前,大家必须知道 $F'(x)=f(x)$。本题我们使用排除法来解答。

先来看(A)选项。



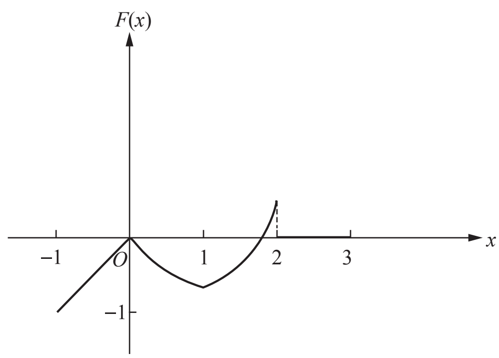
(A)选项给的图在区间$(-1,0)$上是单调递减的。再来看$f(x)$的图(也就是$F(x)$的导函数的图)。

可以看出来,函数$f(x)$(也就是$F(x)$的导函数)在区间$(-1,0)$上是大于0的,这就说



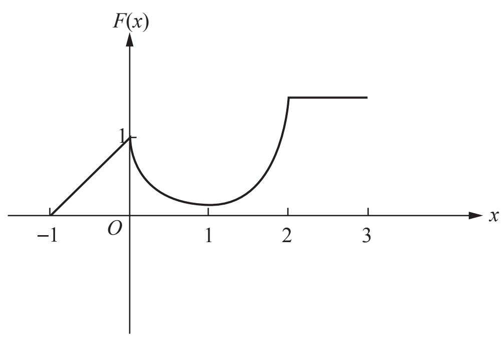
明函数 $F(x)$ 在 $(-1,0)$ 上应该是单调递增的，所以(A) 选项错误。

再来看 (B) 选项。



从图中可以明显看出来，该函数在 $x=2$ 处不连续(极限值 $\neq$ 函数值)，仅凭这一点就可以把(B) 选项排除。因为不连续就肯定不可导，而函数 $F(x)$ 是可导的，所以(B) 选项错误。

再来看 (C) 选项。



从图中可以明显看出，$F(1)=1$。可是 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，所以 $F(0)$ 应该等于0，所以 (C) 选项错误。

综上所述，本题应该选择（D）选项。

（5）设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$均为2阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$、$\boldsymbol{B}^*$分别为$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$的伴随矩阵。若$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$的伴随矩阵为（　　）。

（A）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

（B）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

（D）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

解：由于$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$均为2阶矩阵，所以分块矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$肯定是一个方阵(行数等于列数)。所以必然有对应的行列式，现在来计算一下方阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$所对应的行列式$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$的值。

怎么计算呢?就用如下两组公式。

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{m\times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{m\times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}_{m\times m} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

由第二组公式可知

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 2}\times|\boldsymbol{A}|\times|\boldsymbol{B}| = 6$$

由于方阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$所对应的行列式$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$不等于0，这说明方阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$是可逆矩阵。对于可逆矩阵$\boldsymbol{A}$而言，必有$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\times\boldsymbol{A}^{-1}$。所以对于矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$而言，有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}\times\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} \tag{1}$$

而刚才已经计算出了 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = 6$，代入(1) 式得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* = 6\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} \tag{2}$$

接下来计算 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}$，可利用如下定理：

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 都是矩阵 A 的子矩阵，且是方阵。矩阵 $\boldsymbol{O}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵，但不一定是方阵，矩阵 $\boldsymbol{O}$ 中的每一个数均为 0。若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

由以上定理可知

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \tag{3}$$

将(3) 式代入(2) 式，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* = 6\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \tag{4}$$

而

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \times \boldsymbol{A}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^* \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{B}|} \times \boldsymbol{B}^* = \frac{1}{3}\boldsymbol{B}^* \tag{6}$$

将(5) 式、(6) 式代入(4) 式中，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* = 6\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \frac{1}{3}\boldsymbol{B}^* \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \tag{7}$$

(7) 式可以化简为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \tag{8}$$

所以本题应该选择（B）选项。

(6) 设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{P}$均为3阶矩阵，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{P}$的转置矩阵，且$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。若$\boldsymbol{P}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$，则$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为(　　)。

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解：由于$\boldsymbol{Q}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$，所以可以将矩阵$\boldsymbol{Q}$写为$\boldsymbol{Q}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

而$\boldsymbol{P}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3)$，所以有$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

既然$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\left[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{A}\times\left[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

根据公式$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，上式可以变为

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\left[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{A}\times\left[\boldsymbol{P}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{P} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

我们知道，矩阵的乘法具有结合律，所以有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{P} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{A} \times [\boldsymbol{P} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{P} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times (\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{P}) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

已知 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{T} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

接下来利用矩阵乘法算出这三个矩阵的乘积就可以了。不过要提示大家一点，由于最左侧的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和最右侧的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 都是初等矩阵，所以没有必要真正按照矩阵乘法法则计算，用如下方法来求会比较方便：

首先求 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。由于 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的第 2 行乘以 1 加到第 1 行得到的，所以将 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的第 2 行乘以 1 加到第 1 行就是 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}。$$

所以

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

由于$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是单位矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的第 2 列乘以 1 加到第 1 列得到的，所以将$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$的第 2 列乘以 1 加到第 1 列就是$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，所以本题应该选择（A）选项。

(7) 设事件 A 与事件 B 互不相容，则(　　)。

(A) $P(\bar{A}\bar{B})=0$

(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(\bar{A})=1-P(B)$

(D) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

解：已知事件 A 与事件 B 互不相容(不相容的意思就是互斥)，根据互斥的定义有

$$AB=\phi \tag{1}$$

将(1) 式的等式左右两侧都取对立事件，得

$$\overline{AB}=\Omega \tag{2}$$

根据对偶律，有

$$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B} \tag{3}$$

将(2) 式、(3) 式相结合，得

$$\bar{A}\cup\bar{B}=\Omega \tag{4}$$

必然事件 Ω 的概率肯定是 1，即

$$P(\Omega)=1 \tag{5}$$

将(4) 式、(5) 式相结合，得

$$\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}}\cup\overline{\boldsymbol{B}})=1 \tag{6}$$

所以本题应该选择（D）选项。

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P(Y=0)=P(Y=1)=\dfrac{1}{2}$。记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为(　　)。

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

解： 本题问的是函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数，首先得知道 $F_Z(z)$ 是什么，所以利用分布函数的定义先求 $F_Z(z)$。

当 $z<0$ 时：

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z) \tag{1}$$

将 $Z=XY$ 代入(1) 式，得

$$F_Z(z)=P(XY\leqslant z) \tag{2}$$

由于 $P(Y=0)=P(Y=1)=\dfrac{1}{2}$，所以必然有

$$P(XY\leqslant z)=P(XY\leqslant z,Y=0)+P(XY\leqslant z,Y=1) \tag{3}$$

将(2) 式、(3) 式相结合，得

$$F_Z(z)=P(XY\leqslant z,Y=0)+P(XY\leqslant z,Y=1) \tag{4}$$

当 $Y=0$ 时，由于 $XY=0$，所以 $XY\leqslant z$ 指的就是 $z\geqslant 0$，而现在是在“$z<0$”的前提下讨论，所以“当 $Y=0$ 时，$XY\leqslant z$”的概率是 0，即

$$P(XY\leqslant z,Y=0)=0 \tag{5}$$

将(4) 式、(5) 式相结合，得

$$F_Z(z)=P(XY\leqslant z,Y=1) \tag{6}$$

由条件概率公式可得

$$P(XY\leqslant z,Y=1)=P(Y=1)P(XY\leqslant z\mid Y=1) \tag{7}$$

将(6) 式、(7) 式相结合，得

$$F_Z(z)=P(Y=1)P(XY\leqslant z\mid Y=1) \tag{8}$$

已知

$$P(Y=1)=\frac{1}{2} \tag{9}$$

将(8)式、(9)式相结合，得

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}P(XY\leqslant z\mid Y=1) \tag{10}$$

很明显，$P(XY\leqslant z\mid Y=1)$可以写为

$$P(XY\leqslant z\mid Y=1)=P(X\leqslant z\mid Y=1) \tag{11}$$

将(10)式、(11)式相结合，得

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}P(X\leqslant z\mid Y=1) \tag{12}$$

已知X、Y相互独立，所以有

$$P(X\leqslant z\mid Y=1)=P(X\leqslant z) \tag{13}$$

将(12)式、(13)式相结合，得

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}P(X\leqslant z) \tag{14}$$

由于X服从标准正态分布$N(0,1)$，所以

$$P(X\leqslant z)=\phi(z) \tag{15}$$

将(14)式、(15)式相结合，得

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}\phi(z) \tag{16}$$

当$z\geqslant 0$时：

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z) \tag{17}$$

将$Z=XY$代入(17)式，得

$$F_Z(z)=P(XY\leqslant z) \tag{18}$$

由于$P(Y=0)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$，所以必然有

$$P(XY\leqslant z)=P(XY\leqslant z,Y=0)+P(XY\leqslant z,Y=1) \tag{19}$$

将(18)式、(19)式相结合，得

$$F_Z(z)=P(XY\leqslant z,Y=0)+P(XY\leqslant z,Y=1) \tag{20}$$

由条件概率公式可得

$$P(XY\leqslant z,Y=0)=P(Y=0)P(XY\leqslant z\mid Y=0) \tag{21}$$

$$P(XY\leqslant z,Y=1)=P(Y=1)P(XY\leqslant z\mid Y=1) \tag{22}$$

将(21)式、(22)式代入(20)式，得

$$F_Z(z)=P(Y=0)P(XY\leqslant z\mid Y=0)+P(Y=1)P(XY\leqslant z\mid Y=1) \tag{23}$$

由于现在是在“$z \geqslant 0$”的前提下讨论的，所以必然有

$$P(XY \leqslant z \mid Y = 0) = 1 \tag{24}$$

将(23)式、(24)式相结合，得

$$F_Z(z) = P(Y = 0) + P(Y = 1)P(XY \leqslant z \mid Y = 1) \tag{25}$$

已知

$$P(Y = 0) = \frac{1}{2} \tag{26}$$

$$P(Y = 1) = \frac{1}{2} \tag{27}$$

将(26)式、(27)式代入(25)式，得

$$F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(XY \leqslant z \mid Y = 1) \tag{28}$$

很明显，$P(XY \leqslant z \mid Y = 1)$ 可以写为

$$P(XY \leqslant z \mid Y = 1) = P(X \leqslant z \mid Y = 1) \tag{29}$$

将(28)式、(29)式相结合，得

$$F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(X \leqslant z \mid Y = 1) \tag{30}$$

已知 X、Y 相互独立，所以有

$$P(X \leqslant z \mid Y = 1) = P(X \leqslant z) \tag{31}$$

将(30)式、(31)式相结合，得

$$F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(X \leqslant z) \tag{32}$$

由于 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，所以

$$P(X \leqslant z) = \phi(z) \tag{33}$$

将(32)式、(33)式相结合，得

$$F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\phi(z) \tag{34}$$

综上所述，有 $F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi(z), z < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\phi(z), z \geqslant 0 \end{cases}$。可以看出，函数 $F_Z(z)$ 仅在 $z = 0$ 处间断，所以本题应该选择（B）选项。

二、填空题：9 ~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1} =$ ________。

解:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}\tag{1}$$

根据等价无穷小替换原则，可以将分母$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1$换为$\frac{1}{3}x^2$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}\tag{2}$$

将(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}\tag{3}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}$可以写为

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}=e\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\cos x-1}}{\frac{1}{3}x^2}\tag{4}$$

将(3)式、(4)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=e\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\cos x-1}}{\frac{1}{3}x^2}\tag{5}$$

$e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\cos x-1}}{\frac{1}{3}x^2}$可以写为

$$e\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\cos x-1}}{\frac{1}{3}x^2}=-e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-1}-1}{\frac{1}{3}x^2}\tag{6}$$

将(5)式、(6)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=-e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-1}-1}{\frac{1}{3}x^2}\tag{7}$$

根据等价无穷小替换原则，有

$$-e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-1}-1}{\frac{1}{3}x^2}=-e\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{1}{3}x^2}\tag{8}$$

将(7)式、(8)式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=-e\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{1}{3}x^2}\tag{9}$$

$-\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\frac{1}{3}x^2}$ 可以写为

$$-\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{1}{3}x^2}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2} \tag{10}$$

将(9) 式、(10) 式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2} \tag{11}$$

根据等价无穷小替换原则，有

$$\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\frac{3}{2}\mathrm{e} \tag{12}$$

将(11) 式、(12) 式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\frac{3}{2}\mathrm{e} \tag{13}$$

所以本题应填$\dfrac{3}{2}\mathrm{e}$。

(10) 设 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$ ________。

解：本题有两种方法可以求解。

第一种方法是先求出$\dfrac{\partial z}{\partial x}$($z=(x+\mathrm{e}^y)^x$ 的等式左右两侧同时对 x 求偏导来求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$)，然后把 $x=1$ 且 $y=0$ 代入。但是对于本题而言，采用这种方法的计算量较大，因此并不是首选方法。

那么本题的首选方法(第二种方法) 是什么呢?

由于本题是对 x 求偏导，所以可以将 $y=0$ 代入 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$ 中，求得 $z=(x+1)^x$。现在只需计算出$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$ 即可。

$z=(x+1)^x$ 可以改写为 $z=\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}$，所以$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}\left[\ln(1+x)+\dfrac{x}{x+1}\right]$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=2\left(\ln 2+\dfrac{1}{2}\right)=2\ln 2+1$。

所以本题应填 $2\ln 2+1$。

(11) 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$的收敛半径为________。

解：由于$a_n=\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}}\right|=e\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\frac{1-\left(-\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{e}\right)^n}=e$$

所以收敛半径为$\frac{1}{e}$。

本题应填$\frac{1}{e}$。

(12) 设某产品的需求函数为$Q=Q(p)$，其中价格p的弹性$\varepsilon_p=0.2$，则当需求量为10000件时，价格增加1元会使产品收益增加________元。

解：这种与经济有关的题几乎每年数学三都会，现在我告诉大家六句话，大家以后就用这六句话来解这类题。

第一句话：大家一定要知道收益$R=PQ$；一定要知道利润$I=PQ-C$(C为成本)。

第二句话：大家一定要知道$\frac{EQ}{EP}=\frac{P}{Q}\times\frac{dQ}{dP}$或$\frac{EQ}{EP}=-\frac{P}{Q}\times\frac{dQ}{dP}$。具体来说：当需求弹性大于0时，取负；当需求弹性小于0时，取正。

第三句话：大家一定要知道收益对价格的弹性公式$\frac{ER}{EP}=\frac{P}{R}\times\frac{dR}{dP}$，一定要知道收益对需求的弹性公式$\frac{ER}{EQ}=\frac{Q}{R}\times\frac{dR}{dQ}$。

第四句话：大家一定要知道$\frac{dR}{dP}=Q+P\frac{dQ}{dP}$，一定要知道$\frac{dR}{dQ}=P+Q\frac{dP}{dQ}$。

第五句话：大家一定要知道当边际收益等于边际成本时，利润最大。

第六句话：大家一定要知道边际成本的计算方法，即$\frac{dC}{dQ}$；一定要知道边际收益的计算方法，即$\frac{dR}{dQ}$；一定要知道边际利润的计算方法，即$\frac{dI}{dQ}$。

现在来看本题。

由于需求对价格的弹性等于0.2(也就是说需求对价格的弹性大于0)，由“第二句话”可知

$$-\frac{P}{Q}\times\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=0.2 \tag{1}$$

由“第四句话”可知

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \tag{2}$$

(2) 式很明显可以化为

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1+\frac{P}{Q}\times\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}) \tag{3}$$

将(1) 式、(3) 式相结合，得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-0.2) \tag{4}$$

(4) 式可以化简为

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=0.8Q \tag{5}$$

在(5) 式的等式左右两侧同时乘以 $\mathrm{d}P$ 得

$$\mathrm{d}R=0.8Q\mathrm{d}P \tag{6}$$

$\mathrm{d}R$ 其实就是 ΔR，$\mathrm{d}P$ 其实就是 ΔP，所以(6) 式可以化为

$$\Delta R=0.8\times Q\times\Delta P \tag{7}$$

由于 $Q=10000$，$P=1$，代入(7) 式得

$$\Delta R=0.8\times10000\times1=8000 \tag{8}$$

即：当需求量为 10000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加 8000 元。

所以本题应填 8000。

(13) 设 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}=\begin{pmatrix}1\\0\\k\end{pmatrix}$，若矩阵 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$ ________。

解： 由于 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{\beta}}=\begin{pmatrix}1\\0\\k\end{pmatrix}$，所以有 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times(1\quad0\quad k)=\begin{pmatrix}1&0&k\\1&0&k\\1&0&k\end{pmatrix}$。

$\begin{pmatrix}1&0&k\\1&0&k\\1&0&k\end{pmatrix}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。现在告诉大家一个结论：若两个矩阵相似，则这两个矩阵的对角线数字之和必相等。

对于本题而言，有 $1+0+k=3+0+0$，解得 $k=2$。

所以本题应填 2。

(14) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自二项分布总体 $X(X \sim B(n,p))$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差。记统计量 $T=\overline{X}-S^2$，则 $ET=$ ________。

解：已知随机变量 X 满足 $X \sim B(n,p)$，也就是说随机变量 X 服从参数为 n，p 的二项分布。

请看下面这个表格。

分　布	数学期望	方　差
① 二项分布 $B(n,p)$	np	$np(1-p)$
② 泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
③ 几何分布 $G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
④ 均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
⑤ 指数分布 $E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
⑥ 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
⑦ χ^2 分布 $\chi^2(n)$	n	$2n$
⑧ t 分布 $t(n)$	0	$\frac{n}{n-2}$

由上表的 ① 可知，随机变量 X 的数学期望 $E(X)=np$，方差 $D(X)=np(1-p)$。

下面告诉大家两个结论(注意：这两个结论不是针对本题的，而是针对所有题的)。

结论 1　如果总体 X 具有数学期望 μ(即 $E(X)=\mu$)，则 $E(\overline{X})=\mu$。

结论 2　如果总体 X 具有方差 σ^2(即 $D(X)=\sigma^2$)，则 $E(S^2)=\sigma^2$。

由结论 1 可知，对于本题而言，有

$$E(\overline{X})=np \tag{1}$$

由结论 2 可知，对于本题而言，有

$$E(S^2)=np(1-p) \tag{2}$$

由于 $T=\overline{X}-S^2$，所以有

$$E(T)=E(\overline{X}-S^2) \tag{3}$$

很显然，(3) 式可以写为

$$E(T)=E(\overline{X})-E(S^2) \tag{4}$$

把(1) 式、(2) 式代入(4) 式，得

$$E(T) = np - np(1-p) \tag{5}$$

(5)式可以化简为

$$E(T) = np^2 \tag{6}$$

所以本题应填 np^2。

三、解答题：15～23小题，共94分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)(本题满分9分)

求二元函数 $f(x,y) = x^2(2+y^2) + y\ln y$ 的极值。

解：本题是一道非常常规的题目，求的是二元函数的极值。在正式开始讲解本题之前，先来总结一下求二元函数的极值的步骤。

当给定二元函数 $z = f(x,y)$ 时，采用如下方法来求它的极值。

第一步：求出二元函数 $z = f(x,y)$ 的定义域。

第二步：求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

第三步：求三种点。第一种点是使 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ 成立的点，第二种点是 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 没有定义的点，第三种点是 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 没有定义的点。

第四步：求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

第五步：对于第三步求出的每一个点 (x_0,y_0)，计算 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$、$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$、$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$。记 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} A$，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = B$，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} = C$。

若 $AC - B^2 > 0$，说明点 (x_0,y_0) 是极值点。并且有：当 $A > 0$ 时点 (x_0,y_0) 是极小值点，当 $A < 0$ 时点 (x_0,y_0) 是极大值点。

若 $AC - B^2 < 0$，说明点 (x_0,y_0) 不是极值点。

若 $AC - B^2 = 0$，说明点 (x_0,y_0) 有可能是极值点，也有可能不是极值点，还需另作讨论(考研数学一般不会涉及这样的题)。

第六步：对第五步找出的每个极值点计算各自的极值即可。

以上就是我为大家总结的求二元函数的极值的六个步骤，本题就严格按照上述步骤计算就可以了。

第一步：求出二元函数 $z = f(x,y)$ 的定义域。

对于本题而言，很明显定义域是“$-\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty$”。

第二步：求出$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

对于本题而言，由于 $z = x^2(2 + y^2) + y\ln y$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(2 + y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y + \ln y + 1$$

第三步：. 求三种点。第一种点是使$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0\end{cases}$成立的点，第二种点是$\frac{\partial z}{\partial x}$没有定义的点，第三种点是$\frac{\partial z}{\partial y}$没有定义的点。

先求第一种点。

令$\begin{cases}2x(2 + y^2) = 0\\ 2x^2y + \ln y + 1 = 0\end{cases}$，一共就解出一个点，即$(0, e^{-1})$。

再求第二种点。

由于$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(2 + y^2)$，所以在定义域“$-\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty$”上$\frac{\partial z}{\partial x}$处处有定义，没有第二种点。

再求第三种点。

由于$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y + \ln y + 1$，所以在定义域“$-\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty$”上$\frac{\partial z}{\partial y}$处处有定义，没有第三种点。

综上所述，第三步一共只求出了一个点，就是$(0, e^{-1})$。

第四步：求出$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

由于$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(2 + y^2)$，$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y + \ln y + 1$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial(2x(2 + y^2))}{\partial x} = 2(2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial(2x(2 + y^2))}{\partial y} = 4xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial y}=\frac{\partial(2x^2y+\ln y+1)}{\partial y}=2x^2+\frac{1}{y}$$

第五步：对于第三步求出的每一个点(x_0,y_0)，计算$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$、$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$、$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$。记$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=A$,$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=B$,$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}=C$。

若$AC-B^2>0$，说明点(x_0,y_0)是极值点。并且有：当$A>0$时点(x_0,y_0)是极小值点，当$A<0$时点(x_0,y_0)是极大值点。

若$AC-B^2<0$，说明点(x_0,y_0)不是极值点。

若$AC-B^2=0$，说明点(x_0,y_0)有可能是极值点也有可能不是极值点，还需另作讨论。

对于本题而言，由于第三步只求出了$(0,\mathrm{e}^{-1})$这一个点，所以现在只需验证这一个点就可以了。

由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2(2+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^2+\frac{1}{y}$$

所以

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}>0$，即$A>0$。

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=0$，即$B=0$。

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}\right|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}>0$，即$C>0$。

由于$AC-B^2>0$，说明点$(0,\mathrm{e}^{-1})$是极值点。又因为$A>0$，所以点$(0,\mathrm{e}^{-1})$是极小值点。

第六步：对第五步找出的每个极值点计算各自的极值即可。

对于本题而言，第五步一共找出了一个极小值点$(0,\mathrm{e}^{-1})$。现在就针对这个极小值点算一下极小值。

由于本题所给的二元函数是$f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$，所以极小值点$(0,\mathrm{e}^{-1})$所对应的极小值为$f(0,\mathrm{e}^{-1})=-\mathrm{e}^{-1}$。

本题解答完毕。

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})\,dx(x>0)$。

解:由分部积分公式$\int u dv = uv - \int v du$ 可知

$$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})\,dx = x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}) - \int x\,d\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}) \tag{1}$$

把 d 后面的$\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})$对 x 求导,但是只求外层导数,不求内层导数,则(1)式变为

$$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})\,dx = x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}) - \int \frac{x}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}\,d(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}) \tag{2}$$

我们知道,d 后面加减的常数是可以去掉的,所以有

$$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})\,dx = x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}) - \int \frac{x}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}\,d\sqrt{\frac{1+x}{x}} \tag{3}$$

令 $J=\int \frac{x}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}\,d\sqrt{\frac{1+x}{x}}$,则(3)式变为

$$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})\,dx = x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}) - J \tag{4}$$

令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$,则 J 可以写为

$$J=\int \frac{\frac{1}{t^2-1}}{1+t}\,dt \tag{5}$$

(5)式很明显可以变为

$$J=\int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\,dt \tag{6}$$

(6)式可以写为

$$J=\frac{1}{2}\int [(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})\times\frac{1}{t+1}]dt \tag{7}$$

(7)式可以折为

$$J=\frac{1}{2}\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2}dt \tag{8}$$

(8) 式可以进一步拆为

$$J=\frac{1}{4}\int\frac{1}{t-1}\mathrm{d}t-\frac{1}{4}\int\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t+1)^2}\mathrm{d}t \tag{9}$$

通过(9) 式，可以计算出

$$J=\frac{1}{2(t+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}+C \tag{10}$$

将(10) 式中的 t 换为$\sqrt{\frac{1+x}{x}}$得

$$J=\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right)}-\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}+C \tag{11}$$

将(11) 式代入(4) 式，得

$$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)-\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right)}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}+C \tag{12}$$

(17)（本题满分 10 分）

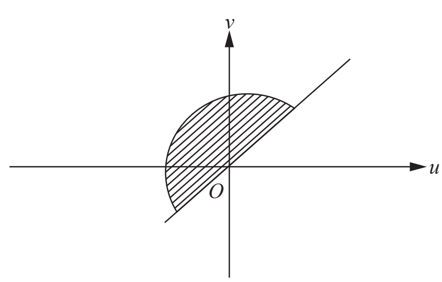
计算二重积分$\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2,y\geqslant x\}$。

解： 令 $u=x-1$，$v=y-1$。这样，$D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2,y\geqslant x\}$ 变成了 $D_{uv}=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 2,v\geqslant u\}$，$\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 变成了$\iint\limits_{D_{uv}}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$。

综上所述，本题可以改写为“计算二重积分$\iint\limits_{D_{uv}}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,其中 $D_{uv}=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 2,v\geqslant u\}$”。

下面正式计算。

首先，在平面直角坐标系中画出积分区域 $D_{uv}=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 2,v\geqslant u\}$，如下图所示。



由于备积分区域是半圆，所以应该采用极坐标系法来计算该二重积分(当二重积分的积分区域是圆、半圆、$\frac{1}{4}$圆时，用极坐标系法来计算)。

所以有$\iint\limits_{D_{uv}}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_a^b\int_c^d(r\cos\theta-r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$。

由积分区域D_{uv}的图形可以看出,很明显θ的积分下限和积分上限分别为$a=\frac{\pi}{4}$,$b=\frac{5}{4}\pi$，r的积分下限和积分上限分别为$c=0$，$d=\sqrt{2}$。

所以有$\iint\limits_{D_{uv}}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}}(r\cos\theta-r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，接下来就是纯计算了。通过计算可知$\iint\limits_{D_{uv}}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}}(r\cos\theta-r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=-\frac{8}{3}$。

(18)(本题满分11分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

(Ⅱ)证明：若函数$f(x)$在$x=0$处连续，在$(0,\delta)$ $(\delta>0)$内可导，且$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则$f'_+(0)$存在，且$f'_+(0)=A$。

解：本题有两问，先来看第(Ⅰ)问。

第(Ⅰ)问要证明的是教材上的一个基本的定理：拉格朗日中值定理。在讲解证明方法之前，先告诉大家：费马引理、罗尔定理、柯西中值定理、洛必达法则、积分中值定理这五个定理的证明大家一定要掌握，因为考试中有可能直接让证明。

好，现在开始证明。

要想证明拉格朗日中值定理，就只需证明函数$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$在$(a,b)$存在零点。

我们知道，函数$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$是函数$f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$的导函数，现在来关注一下函数$f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$。为方便表示，记函数$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$。很明显，函数$F(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且$F(a)=F(b)$，所以根据罗尔定理，可知存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(x)=0$。

也就是说，函数$F'(x)$存在零点。因为$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，所以$f'(x)-$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 存在零点。

证毕。

再来看第(Ⅱ)问。

“$f'_+(0)$”指的是函数$f(x)$在$x=0$处的右导数，根据“右导数的定义式”可知

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\tag{1}$$

(1)式可以化简为

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\tag{2}$$

由于$\lim\limits_{x\to0^+}[f(x)-f(0)]=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}x=0$，所以可以使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{1}\tag{3}$$

(3)式可以化简为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}f'(x)\tag{4}$$

(2)式、(4)式相结合，得

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}f'(x)\tag{5}$$

已知

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=A\tag{6}$$

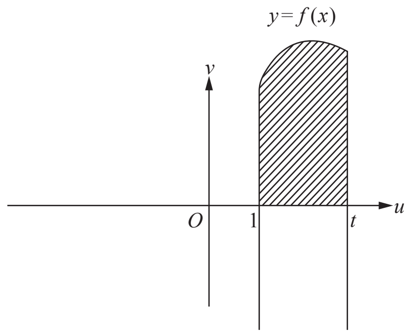
将(5)式、(6)式相结合，得

$$f'_+(0)=A\tag{7}$$

(19)(本题满分 10 分)

设曲线$y=f(x)$，其中$f(x)$是可导函数，且$f(x)>0$。已知曲线$y=f(x)$与直线$y=0$，$x=1$及$x=t(t>1)$所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的πt倍，求该曲线的方程。

解：首先，在平面直角坐标系中画出曲线$y=f(x)$与直线$y=0$，$x=1$及$x=t(t>1)$所围成的曲边梯形，如下图所示。



由上图可知，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$，$x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形的面积为 $\int_1^t f(x)\mathrm{d}x$。

根据旋转体体积公式可知，该曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是 $\int_1^t \pi f^2(x)\mathrm{d}x$。

已知“体积值是面积值的 πt 倍”，所以有

$$\int_1^t \pi f^2(x)\mathrm{d}x = \pi t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

(1) 式可以化简为

$$\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x = t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

(2) 式的等式左右两侧对 t 求导得

$$f^2(t) = \int_1^t f(x)\mathrm{d}x + tf(t) \tag{3}$$

令(3) 式中的 $t=1$ 得

$$f^2(1) = f(1) \tag{4}$$

由(4) 式可以解得 $f(1)=0$ 或 $f(1)=1$，已知 $f(x)>0$，所以 $f(1)>0$，$f(1)=1$。

(3) 式的等式左右两侧对 t 求导得

$$2f(t)f'(t) = 2f(t) + tf'(t) \tag{5}$$

将(5) 式中的 t 换成 x，$f(t)$ 换为 y，得

$$2yf'(x) = 2y + xf'(x) \tag{6}$$

(6) 式与 $f(1)=1$ 联立，就变成了求解一阶微分方程的特解问题，即

$$\begin{cases} 2yf'(x) = 2y + xf'(x) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

下面来求解一下。

$2yf'(x) = 2y + xf'(x)$ 可以变为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{2y}\cdot x = 1$，用公式法解得其通解为 $x = \frac{C}{\sqrt{y}} + \frac{2}{3}y$。

由于 $y(1)=1$，解得 $C=\frac{1}{3}$，所以 $x=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{y}}+\frac{2}{3}y$，化简得 $3x=\frac{1}{\sqrt{y}}+2y$。

（20）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{\xi}}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$。

（Ⅰ）求满足 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_2=\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$，$\boldsymbol{A}^2\vec{\boldsymbol{\xi}}_3=\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$ 的所有向量 $\vec{\boldsymbol{\xi}}_2$、$\vec{\boldsymbol{\xi}}_3$；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任意向量 $\vec{\boldsymbol{\xi}}_2$、$\vec{\boldsymbol{\xi}}_3$，证明 $\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$、$\vec{\boldsymbol{\xi}}_2$、$\vec{\boldsymbol{\xi}}_3$ 线性无关。

解：本题有两问，先来看第（Ⅰ）问。

先求 $\vec{\boldsymbol{\xi}}_2$。

已知 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_2=\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$，这也就意味着，只要求出非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$ 的通解即可，求出的通解就是 $\vec{\boldsymbol{\xi}}_2$。

鉴于一部分同学忘记了求解非齐次方程组通解的步骤,这里先复习一下。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩 r_1、r_2。

（2）判断解的类型。具体的判断方法如下：

① 若 $r_1\neq r_2$，则该非齐次方程组无解。

② 若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2=n$（未知数个数），则该非齐次方程组有唯一的解，不用再进行步骤（3）了。

③ 若 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2<n$（未知数个数），则该非齐次方程组有无穷多解，并且需要进行步骤（3）。

（3）先当成对应的齐次方程组，按齐次方程组的步骤（3）求出齐次方程组的通解。然后再还原成非齐次方程组，令自由未知数取全零，求出非齐次方程组的一个特解。最后，用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解，得到的就是非齐次方程组的通解。

按照这三个步骤就可以求出非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$ 的通解。在这里公布一下答案：非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$ 的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其中 t 为任意常数。所以 $\vec{\boldsymbol{\xi}}_2=t\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其中 t 为任意常数。

再来求$\vec{\boldsymbol{\xi}}_3$。

已知$\boldsymbol{A}^2\vec{\boldsymbol{\xi}}_3=\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$，这也就意味着，只要求出非齐次方程组$\boldsymbol{A}^2\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$的通解即可，求出的通解就是$\vec{\boldsymbol{\xi}}_3$(和刚才求$\vec{\boldsymbol{\xi}}_2$所采用的方法是一样的)。

在这里公布一下答案：非齐次方程组$\boldsymbol{A}^2\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$的通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，其中$u$、$v$为任意常数。所以$\vec{\boldsymbol{\xi}}_3=u\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，其中$u$、$v$为任意常数。

再来看第(Ⅱ)问。

第(Ⅱ)问是证明$\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$、$\vec{\boldsymbol{\xi}}_2$、$\vec{\boldsymbol{\xi}}_3$线性无关。先写出以下式子

$$k_1\vec{\boldsymbol{\xi}}_1+k_2\vec{\boldsymbol{\xi}}_2+k_3\vec{\boldsymbol{\xi}}_3=\vec{0} \tag{1}$$

由线性无关的定义可知，只要能证明仅当k_1、k_2、k_3全为0时上式成立，就说明$\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$、$\vec{\boldsymbol{\xi}}_2$、$\vec{\boldsymbol{\xi}}_3$线性无关。

下面开始证明。

将(1)式的等式左右两侧左乘矩阵A(注意：不是在(1)式的等式左侧乘，而是等式的左右两侧都左乘)得

$$k_1\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_1+k_2\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_2+k_3\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_3=\boldsymbol{A}\vec{\mathbf{0}} \tag{2}$$

而

$$\boldsymbol{A}\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}} \tag{3}$$

(1)式、(3)式相结合，得

$$k_1\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_1+k_2\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_2+k_3\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_3=\vec{\mathbf{0}} \tag{4}$$

已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，根据矩阵的乘法法则可以很轻易地计算出

$$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_1=\vec{\mathbf{0}} \tag{5}$$

将(4)式、(5)式相结合，得

$$k_1\times\vec{\mathbf{0}}+k_2\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_2+k_3\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_3=\vec{\mathbf{0}} \tag{6}$$

(6)式可以化简为

$$k_2\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_2 + k_3\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_3 = \vec{\mathbf{0}} \tag{7}$$

已知

$$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_2 = \vec{\boldsymbol{\xi}}_1 \tag{8}$$

将(7) 式、(8) 式相结合，得

$$k_2\vec{\boldsymbol{\xi}}_1 + k_3\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_3 = \vec{\mathbf{0}} \tag{9}$$

将(9) 式的等式左右两侧左乘矩阵$\boldsymbol{A}$(注意：不是在(9) 式的等式左侧乘，而是等式的左右两侧都左乘) 得

$$k_2\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_1 + k_3\boldsymbol{A}^2\vec{\boldsymbol{\xi}}_3 = \boldsymbol{A}\vec{\mathbf{0}} \tag{10}$$

而

$$\boldsymbol{A}\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{11}$$

将(10) 式、(11) 式相结合，得

$$k_2\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_1 + k_3\boldsymbol{A}^2\vec{\boldsymbol{\xi}}_3 = \vec{\mathbf{0}} \tag{12}$$

由(5) 式已知$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\xi}}_1 = \vec{\mathbf{0}}$，所以(12) 式可以化为

$$k_3\boldsymbol{A}^2\vec{\boldsymbol{\xi}}_3 = \vec{\mathbf{0}} \tag{13}$$

已知

$$\boldsymbol{A}^2\vec{\boldsymbol{\xi}}_3 = \vec{\boldsymbol{\xi}}_1 \tag{14}$$

将(13) 式、(14) 式相结合，得

$$k_3\vec{\boldsymbol{\xi}}_1 = \vec{\mathbf{0}} \tag{15}$$

已知$\vec{\boldsymbol{\xi}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，即向量$\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$不是零向量，根据(15) 式可知$k_3 = 0$。将$k_3 = 0$代入(9) 式中，立刻有

$$k_2\vec{\boldsymbol{\xi}}_1 = \vec{\mathbf{0}} \tag{16}$$

由于向量$\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$不是零向量，根据(16) 式可知$k_2 = 0$。将$k_2 = 0$，$k_3 = 0$代入(1) 式，可得

$$k_1\vec{\boldsymbol{\xi}}_1 = \vec{\mathbf{0}} \tag{17}$$

由于向量$\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$不是零向量，根据(17) 式可知$k_1 = 0$。

由于$k_1 = 0$，$k_2 = 0$，$k_3 = 0$，所以$\vec{\boldsymbol{\xi}}_1$、$\vec{\boldsymbol{\xi}}_2$、$\vec{\boldsymbol{\xi}}_3$线性无关。

(21)(本题满分 11 分)

设二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$。

(Ⅰ)求二次型f的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型f的规范形为$y_1^2+y_2^2$,求a的值。

解: 先来看第(Ⅰ)问。

本题所给的二次型是$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$,现在将二次型$f$写为矩阵的形式。

二次型f所对应的矩阵显然是$\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$,为了后续表示的方便,记这个矩阵为矩阵$\boldsymbol{A}$,即$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$。

第(Ⅰ)问求的就是矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值。

由于$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,所以$\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}a-\lambda&0&1\\0&a-\lambda&-1\\1&-1&a-1-\lambda\end{pmatrix}$,$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}a-\lambda&0&1\\0&a-\lambda&-1\\1&-1&a-1-\lambda\end{vmatrix}$。令$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$,即$\begin{vmatrix}a-\lambda&0&1\\0&a-\lambda&-1\\1&-1&a-1-\lambda\end{vmatrix}=0$,得$(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)=0$,解得$\lambda_1=a$,$\lambda_2=a+1$,$\lambda_3=a-2$。

由此可知,二次型f的矩阵的所有特征值为$\lambda_1=a$,$\lambda_2=a+1$,$\lambda_3=a-2$。

再来看第(Ⅱ)问。

二次型f的规范形为$y_1^2+y_2^2$,写完整就是$1\times y_1^2+1\times y_2^2+0\times y_3^2$。有的同学由此认为矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值就是1、1、0,这种想法是错误的,因为这是规范形而不是标准形,而且就算这是标准形,题中也没有说是使用正交变换法化成的,所以同学们千万不要认为矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值就是1、1、0。

我们来看,这个规范形的系数是1、1、0,这说明标准形的系数肯定是两个正数、一个零,即正惯性指数为2,负惯性指数为0。对于一个普通的二次型而言,无论用什么方法把

它化成标准形，正负惯性指数都是一样的。所以对于本题而言，如果使用正交变换法将二次型化为标准形，那么正负惯性指数也一定是2和0，所以可以推出矩阵$\boldsymbol{A}$有两个特征值为正数，一个特征值为0。而在第（Ⅰ）问中，已经求出了矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值为$\lambda_1 = a$，$\lambda_2 = a+1$，$\lambda_3 = a-2$，所以立刻有$a = 2$。

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x}, 0 < y < x \\ 0, 其他 \end{cases}$

（Ⅰ）求条件概率密度函数$f_{Y|X}(y|x)$；

（Ⅱ）求条件概率$P(X \leqslant 1 | Y \leqslant 1)$。

解：先来看第（Ⅰ）问。第（Ⅰ）问属于“已知联合概率密度函数，求条件概率密度函数”的问题，下面给大家总结一下“已知联合概率密度函数，求条件概率密度函数”题型的解题方法。

步骤 1：求出边缘概率密度函数。

若需要求的是$f_{X|Y}(x|y)$，则求出$f_Y(y)$；

若需要求的是$f_{Y|X}(y|x)$，则求出$f_X(x)$。

步骤 2：写出何时条件概率密度函数不存在。

若需要求的是$f_{X|Y}(x|y)$，则当y在$f_Y(y)$为 0 的段的定义域中取值时，$f_{X|Y}(x|y)$不存在；

若需要求的是$f_{Y|X}(y|x)$，则当x在$f_X(x)$为 0 的段的定义域中取值时，$f_{Y|X}(y|x)$不存在。

步骤 3：确定条件概率密度函数不为 0 的段的定义域。

若需要求的是$f_{X|Y}(x|y)$，则在平面直角坐标系中画出联合概率密度函数$f(x,y)$不为 0 的段的定义域并涂上阴影，然后再画一条平行于x轴且和阴影区域相交的直线。当然，有很多种画法，但无论哪种画法，这条与x轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。我们就利用这条线段上x的最大值和最小值来确定$f_{X|Y}(x|y)$不为 0 的段的定义域。

若需要求的是$f_{Y|X}(y|x)$，则在平面直角坐标系中画出联合概率密度函数$f(x,y)$不为 0 的段的定义域并涂上阴影，然后再画一条平行于y轴且和阴影区域相交的直线。当然，有很多种画法，但无论哪种画法，这条与y轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。我们就利用这条线段上y的最大值和最小值来确定$f_{Y|X}(y|x)$不为 0 的段的定义域。

步骤 4：具体的求出条件概率密度函数不为 0 的段的定义域。

若需要求的是$f_{X|Y}(x|y)$，则利用$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)\text{不为 0 的段}}{f_Y(y)\text{不为 0 的段}}$来求；

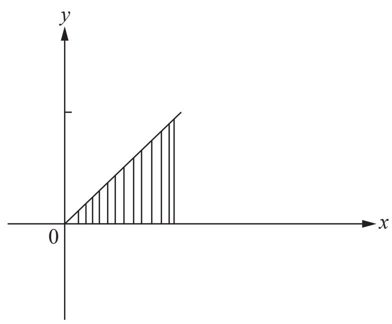
若需要求的是$f_{Y|X}(y|x)$，则利用$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)\text{不为 0 的段}}{f_X(x)\text{不为 0 的段}}$来求。

以上就是“已知联合概率密度函数，求条件概率密度函数”题型的解题方法。现在就严格按照上述步骤来做。

步骤 1 如下：

先将$f_X(x)$写为$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,\square\\0,\text{其他}\end{cases}$，然后在平面直角坐标系中画出联合概率密度函数$f(x,y)$不为 0 的段的定义域并涂上阴影。

$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x},0<y<x\\0,\text{其他}\end{cases}$，不为 0 的段是$\mathrm{e}^{-x}$，不为 0 的段的定义域是$0<y<x$。$0<y<x$的图如下图所示。

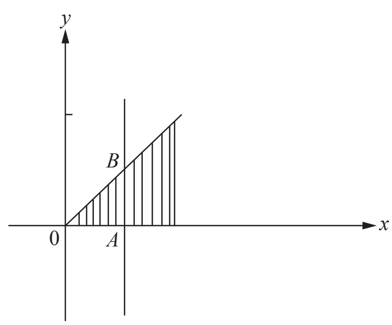


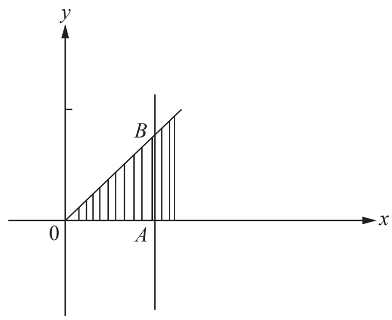
由上图可以看出，阴影区域中x没有最大值，最小值为 0，即$x>0$，所以有

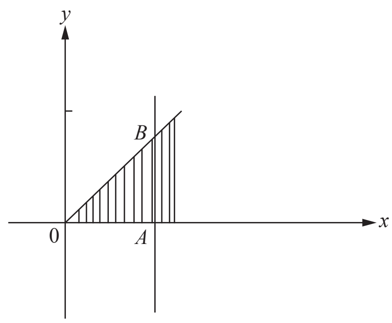
$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,x>0\\0,\text{其他}\end{cases}$$

接下来计算出$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y$。

首先，需要在刚才画出的图中再画一条与y轴平行且和阴影区域相交的直线，其中三种情况如下图所示。







可以看出，这条直线有很多种画法，但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上 y 的最大值肯定是在 B 点取到，最小值肯定是在 A 点取到（由于这条直线有很多种画法，所以 B 点的纵坐标 y 并不是一个定值）。所以只需要求出 B 点和 A 点的纵坐标 y 就可以了。显然，B 点的纵坐标 $y=x$，A 点的纵坐标 $y=0$。所以有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y$。

下面将 $\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的被积函数 $f(x,y)$ 显化为其不为 0 的段。对于本题而言，由于 $f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, 0 < y < x \\ 0, 其他 \end{cases}$，不为 0 的段是 e^{-x}，所以有：

$$\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y$$

现在就剩下纯计算了。

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y = x\mathrm{e}^{-x}$$

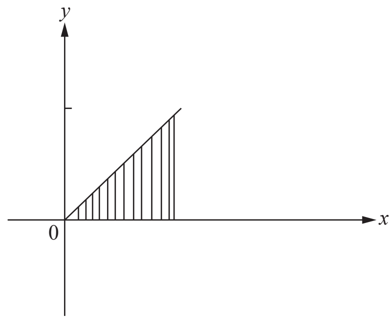
所以 $f_X(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x}, x > 0 \\ 0, 其他 \end{cases}$。

步骤 2 如下：

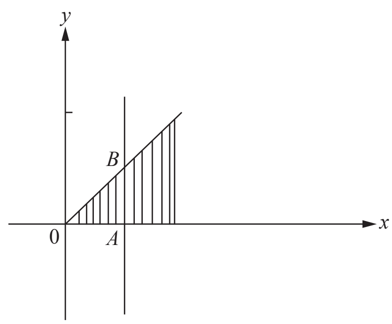
$f_X(x)$ 为 0 的段的定义域是 $x \leqslant 0$。所以当 $x \leqslant 0$ 时，$f_{Y|X}(y|x)$ 不存在；当 $x > 0$ 时，$f_{Y|X}(y|x)$ 存在。

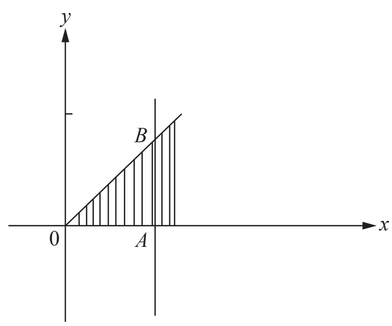
步骤 3 如下：

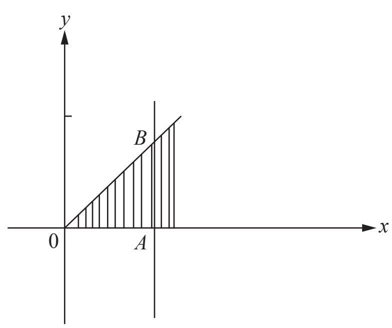
先在平面直角坐标系中画出联合概率密度函数$f(x,y)$不为0的段的定义域并涂上阴影如下图所示。



然后再画一条平行于y轴且和阴影区域相交的直线，其中三种情况如下图所示。







由上图可以看出，这条直线有很多种画法，但无论哪种画法，这条与y轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上y的最大值肯定是在B点取到，最小值肯定

是在A点取到(由于这条直线有很多种画法，所以B点的纵坐标y并不是一个定值)。只需要求出B点和A点的纵坐标y就可以了。显然，B点的纵坐标$y=x$，A点的纵坐标$y=0$，$0<y<x$，所以有：

当$x>0$时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}待求,0<y<x\\0, \quad 其他\end{cases}$

步骤4如下：

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)的不为0的段}{f_X(x)的不为0的段}=\frac{e^{-x}}{xe^{-x}}=\frac{1}{x}$$

综上所述：

当$x\leqslant 0$时，$f_{Y|X}y|x$不存在；

当$x>0$时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},0<y<x\\0,其他\end{cases}$。

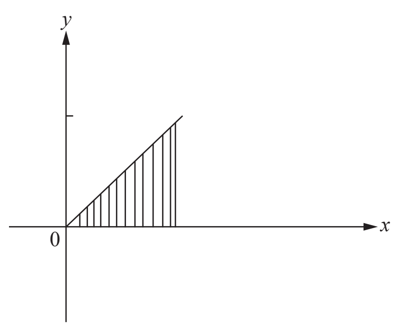
再来看第二问。

由条件概率公式可知$P(X\leqslant 1 \mid Y\leqslant 1)=\dfrac{P(X\leqslant 1,Y\leqslant 1)}{P(Y\leqslant 1)}$，所以只需计算出$P(X\leqslant 1,Y\leqslant 1)$和$P(Y\leqslant 1)$即可。

先来计算$P(Y\leqslant 1)$，这需要知道随机变量Y的边缘概率密度函数$f_Y(y)$。

先将$f_X(x)$写为$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx,\square\\0,其他\end{cases}$，然后在平面直角坐标系中画出联合概率密度函数$f(x,y)$不为0的段的定义域并涂上阴影。

$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x},0<y<x\\0,其他\end{cases}$，不为0的段是$e^{-x}$，不为0的段的定义域是$0<y<x$。$0<y<x$的图如下图所示。

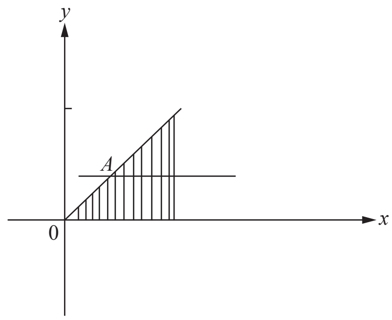


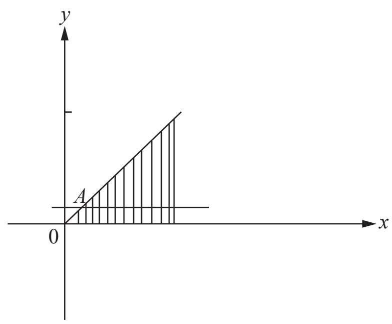
由上图可以看出，阴影区域中y没有最大值，最小值为0，即$y>0$，所以有

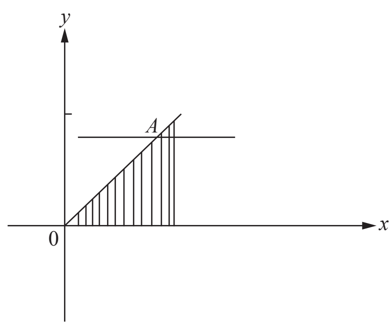
$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx,y>0\\0,其他\end{cases}$$

接下来计算$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$。

首先需要在刚才画出的图中再画一条与 x 轴平行且和阴影区域相交的直线，其中三种情况如下图所示。







这条直线有很多种画法，但无论哪种画法，这条与 x 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条射线。这条射线上的 x 最大肯定是 $+\infty$，最小值肯定是在 A 点取到且 A 点的横坐标 $x = y$。所以 $y < x$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{y}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$。

接下来需要将$\int_{y}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 的被积函数 $f(x,y)$ 显化为其不为 0 的段。由于 $f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, 0 < y < x \\ 0, 其他 \end{cases}$，不为 0 的段是 e^{-x}，所以有

$$\int_{y}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{y}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

现在就剩下纯计算了。

$$\int_{y}^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-y}$$

所以 $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, y > 0 \\ 0, 其他 \end{cases}$。

现在已经求出了 $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, y > 0 \\ 0, 其他 \end{cases}$，所以

$$P(Y \leqslant 1) = \int_{-\infty}^{1} f_Y(y) dy = \int_{0}^{1} e^{-y} dy = 1 - e^{-1}$$

再来计算 $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$。

已知联合概率密度函数，所以现在属于“已知联合概率密度函数，求 P(既含 X 又含 Y)”的题型。

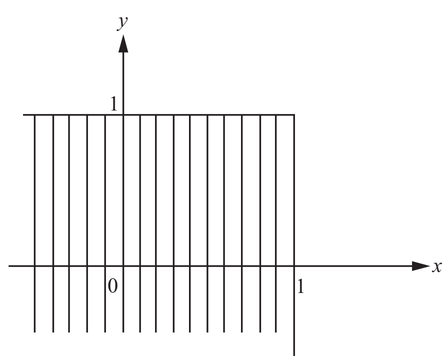
“已知联合概率密度函数，求 P(既含 X 又含 Y)”的题型的解题方法为 $P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x,y) dxdy$。

由上述解题方法可知，$P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1) = \iint\limits_{x \leqslant 1, y \leqslant 1} f(x,y) dxdy$，接下来只需要把这个二重积分计算出来即可。

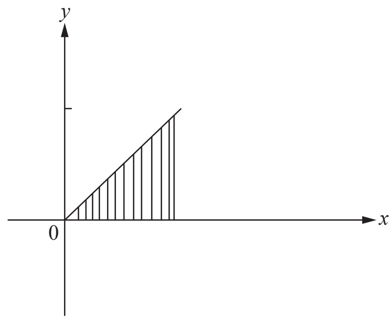
步骤 1：画图。

由于 $f(x,y) = \begin{cases} e^{-x}, 0 < y < x \\ 0, 其他 \end{cases}$，并且求的是 $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$，所以不仅要画出 $x \leqslant 1$，$y \leqslant 1$ 的图，还要画出 $0 < y < x$ 的图，然后两个图取公共部分。

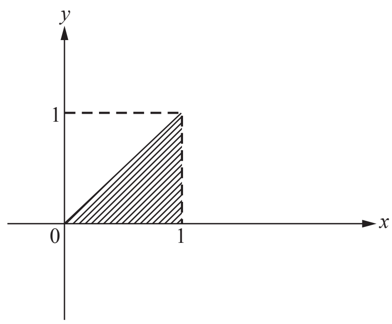
$x \leqslant 1, y \leqslant 1$ 的图如下图所示。



$0 < y < x$ 的图如下图所示。



所以 $x\leqslant 1$,$y\leqslant 1$ 的图与 $0<y<x$ 的图的公共部分如下图所示。



步骤 2:根据步骤 1 的图确定积分上、下限并将 $f(x,y)$ 显化成不为 0 的段。

对于本题而言,就是 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y$。

这里对上式解释一下。"$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y$" 的意思是:先计算 $\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y$,假设 $\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=A$,然后算 $\int_0^1 A\mathrm{d}x$。那么,上、下限是怎么确定的呢?很简单。由于阴影区域中的 x 的最小值为 0,最大值为 1,所以有 $\int_0^1\mathrm{d}x$;然后画一条与 y 轴平行且与阴影区域相交的直线,即可确定出 0、x。

步骤 3:计算。

对于本题而言,就是要计算 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y$。通过计算可知 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=1-2\mathrm{e}^{-1}$,所以 $P(X\leqslant 1,Y\leqslant 1)=1-2\mathrm{e}^{-1}$。

综上所述,

$$P(X\leqslant 1\mid Y\leqslant 1)=\frac{P(X\leqslant 1,Y\leqslant 1)}{P(Y\leqslant 1)}=\frac{1-2\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$$

（23）（本题满分 11 分）

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球。现有放回地从袋中取两次，每次取一个球。以 X、Y、Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数。

（Ⅰ）求 $P\{X=1 \mid Z=0\}$；

（Ⅱ）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布。

解：本题有两问，第（Ⅰ）问是求常数 A，第（Ⅱ）问是求条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y \mid x)$。

先来看第（Ⅰ）问。

第（Ⅰ）问是求条件概率 $P\{X=1 \mid Z=0\}$，由条件概率的公式可知 $P\{X=1 \mid Z=0\}=\dfrac{P\{X=1,\ Z=0\}}{P\{Z=0\}}$。也就是说，现在只需分别计算出 $P\{X=1,\ Z=0\}$ 和 $P\{Z=0\}$，然后计算一下这两者的比值即可。

先来计算 $P\{Z=0\}$。

由于 Z 代表的是两次取球所取得白球的个数，所以 $Z=0$ 就代表这两次都没有取到白球，进而可知 $Z=0$ 代表这两次中的每一次取的都是红球或黑球。而每一次取红球或黑球的概率都是 $\dfrac{1+2}{6}=\dfrac{3}{6}$，所以这两次中每一次取的都是红球或黑球的概率为 $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$，即 $P\{Z=0\}=\dfrac{1}{4}$。

再来计算 $P\{X=1,\ Z=0\}$。

由于 X 代表的是两次取球所取得红球的个数，Z 代表的是两次取球所取得白球的个数，所以 $X=1$，$Z=0$ 就代表这两次中有一次取到红球而没有取到白球，进而可知 $X=1$，$Z=0$ 代表这两次中一次取到红球一次取到黑球。如果是第一次取到红球而第二次取到黑球，概率是 $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{18}$，如果是第一次取到黑球而第二次取到红球，概率是 $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{18}$，所以这两次中一次取到红球一次取到黑球的概率为 $\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{9}$，即 $P\{X=1,\ Z=0\}=\dfrac{1}{9}$。

现在已经计算出了 $P\{Z=0\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{X=1,\ Z=0\}=\dfrac{1}{9}$，代入 $P\{X=1 \mid Z=0\}=\dfrac{P\{X=1,\ Z=0\}}{P\{Z=0\}}$ 中，得 $P\{X=1 \mid Z=0\}=\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{9}$。

再来看第（Ⅱ）问。

第（Ⅱ）问是求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布，“概率分布”指的是“分布律”，所以第（Ⅱ）问实际上求的是二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律。

首先来看，二维随机变量(X,Y)可以取的值有：$(X,Y)=(0,0)$，$(X,Y)=(0,1)$，$(X,Y)=(0,2)$，$(X,Y)=(1,0)$，$(X,Y)=(1,1)$，$(X,Y)=(1,2)$，$(X,Y)=(2,0)$，$(X,Y)=(2,1)$，$(X,Y)=(2,2)$。所以画出下表。

$X \backslash Y$	0	1	2
0			
1			
2			

接着需要求以下九个概率值：$P(X=0,Y=0)$，$P(X=0,Y=1)$，$P(X=0,Y=2)$，$P(X=1,Y=0)$，$P(X=1,Y=1)$，$P(X=1,Y=2)$，$P(X=2,Y=0)$，$P(X=2,Y=1)$，$P(X=2,Y=2)$。

先来算$P(X=0,Y=0)$。

由于X、Y、Z分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数，所以$X=0,Y=0$就代表这两次中没有取到红球也没有取到黑球，进而可知$X=0,Y=0$代表这两次取到的都是白球。而这两次中每次取白球的概率都是$\frac{3}{6}$，所以两次都取白球的概率是$\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$，即$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{4}$。

再来算$P(X=0,Y=1)$。

由于X、Y、Z分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数，所以$X=0,Y=1$就代表这两次中没有取到红球而取到一次黑球，进而可知$X=0,Y=1$代表这两次中取到一次黑球并且取到一次白球。如果是第一次取到黑球而第二次取到白球，概率是$\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$；如果是第一次取到白球而第二次取到黑球，概率是$\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$，所以两次中一次取到黑球一次取到白球的概率为$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$，即$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{3}$。

再来算$P(X=0,Y=2)$。

由于X、Y、Z分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数，所以$X=0,Y=2$就代表这两次中没有取到红球而取到两次黑球，而每一次取到黑球的概率都是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，所以两次都取到黑球的概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，即$P(X=0,Y=2)=\frac{1}{9}$。

再来算$P(X=1,Y=0)$。

由于 X、Y、Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数，所以 $X=1$，$Y=0$ 就代表这两次中取到一次红球而没有取到黑球，进而可知 $X=1,Y=0$ 代表这两次中取到一次红球并且取到一次白球。如果是第一次取到红球而第二次取到白球，概率是$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$；如果是第一次取到白球而第二次取到红球，概率是$\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$，所以两次中一次取到红球一次取到白球的概率为$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$，即 $P(X=1,Y=0)=\frac{1}{6}$。

再来算 $P(X=1,Y=1)$。

由于 X、Y、Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数，所以 $X=1,Y=1$ 就代表这两次中取到一次红球取到一次黑球。如果是第一次取到红球而第二次取到黑球，概率是$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{18}$；如果是第一次取到黑球而第二次取到红球，概率是$\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$，所以这两次中一次取到红球一次取到黑球的概率为$\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{1}{9}$，即 $P\{X=1,\ Y=1\}=\frac{1}{9}$。

再来算 $P(X=1,Y=2)$。

由于 X、Y、Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数，所以 $X=1,Y=2$ 就代表这两次中取到一次红球取到两次黑球。我们知道，一共才取了两次，怎么可能取出三个球呢?所以 $P(X=1,Y=2)=0$。

再来算 $P(X=2,Y=0)$。

由于 X、Y、Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数，所以 $X=2,Y=0$ 就代表这两次中取到两次红球而没有取到黑球，而每一次取到红球的概率都是$\frac{1}{6}$，所以这两次都取到红球的概率为$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，即 $P(X=2,Y=0)=\frac{1}{36}$。

再来算 $P(X=2,Y=1)$。

由于 X、Y、Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数，所以 $X=2,Y=0$ 就代表这两次中取到两次红球取到一次黑球。因为不可能取出三个球，所以 $P(X=2,Y=1)=0$。

最后来算 $P(X=2,Y=2)$。

由于 X、Y、Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数，所以 $X=2,Y=2$ 就代表这两次中取到两次红球取到两次黑球。因为不可能取出四个球，所以 $P(X=2,Y=2)=0$。

综上所述，有

$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{4}$

$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{3}$

$P(X=0,Y=2)=\frac{1}{9}$

$P(X=1,Y=0)=\frac{1}{6}$

$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{9}$

$P(X=1,Y=2)=0$

$P(X=2,Y=0)=\frac{1}{36}$

$P(X=2,Y=1)=0$

$P(X=2,Y=2)=0$

所以二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0